НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

51 **№1580**
М34

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Методические указания
к практическим занятиям и выполнению РГР
по курсу «Дискретная математика»

Часть 1

Новосибирск
1998

510.6 (07)

Составители: ассист. М.Э.Рояк
ассист. С.Х.Рояк

Рецензент: ст.преп. Т.А.Шапошникова

Работа подготовлена кафедрой прикладной математики.

1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1.1. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Точного определения понятия "множество" в математике нет. Создатель теории множеств немецкий математик Георг Кантор (1845-1918гг.) использовал следующее "определение": *"множество* или *совокупность* – это собрание определенных и различных объектов нашей интуиции или интеллекта, мыслимое в качестве целого".

Будем обозначать множества прописными латинскими буквами A, B, ... , Z, а элементы, принадлежащие данным множествам, – строчными латинскими буквами a, b,..., z.

Способы задания множества

1) Множество может быть задано с помощью *перечисления* (указания) всех его элементов, заключенных в фигурные скобки. Например, запись $A=\{1,5\}$ задает множество A, которое состоит из двух элементов – чисел 1 и 5.
2) Множество может быть задано с помощью *характеристического свойства* его элементов. Например, множество A, состоящее из элементов x, являющихся четными числами, можно записать следующим образом: $A=\{x|x$ – четное число$\}$. В такой записи слева от вертикальной черты задается природа элемента (единичный элемент, пара элементов, множество, цепочка символов и т.п.), а справа – характеристическое свойство.

Основные определения

Если множество содержит конечное число элементов, то его называют *конечным*, а если в нем бесконечно много элементов, то *бесконечным*.

Принадлежность элементов множеству обозначается символами $\in$ и $\notin$. Запись “$a\in A$” читается: “элемент a принадлежит множеству A”. Запись “$a\notin A$” читается: “элемент a не принадлежит множеству A”.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$. Множество, содержащее все элементы, находящиеся в рассмотрении, называется *универсальным* или *универсумом* и обозначается $\mathbf{U}$.

Множество A называется *подмножеством* множества B (обозначается $A \subset B$ или $B \supset A$), если все элементы множества A принадлежат множеству B. Если $A \subset B$, то будем также говорить, что множество A содержится в B, или имеется включение множества A в B. Подмножеством множества B считают также пустое множество и само множество B; их называют *несобственными подмножествами*; остальные подмножества называют *собственными подмножествами*.

Совокупность всех подмножеств множества A называется *булеаном* и обозначается $P(A)=\{B|B \subset A\}$.

Множества A и B называют *равными* или *совпадающими* (обозначается $A=B$), если они состоят из одних и тех же элементов, т.е. если $B \supset A$ и $A \subset B$. Таким образом, чтобы доказать равенство множеств, требуется доказать два включения.

Множество $A=\{a,b,c,...\}$ называется *упорядоченным*, если между его элементами установлено некоторое соотношение $a<b$ (читают: "a предшествует b"), имеющее следующие свойства:

1) для каких-либо двух элементов а и b действительно одно и только одно из соотношений $a<b$, $a>b$, $a=b$;
2) для всяких трех элементов a, b и c из соотношений $a<b$ и $b<c$ следует соотношение $a<c$.

Основные операции теории множеств.

На булеане $\boldsymbol{P}(\mathbf{U})$ определим операции над множествами $A \in \boldsymbol{P}(\mathbf{U})$ и $B \in \boldsymbol{P}(\mathbf{U})$.

Объединением множеств A и B называется множество C, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат, по крайней мере, одному из множеств A, B. Обозначение: $C=A \bigcup B$. Символическая запись: $A \bigcup B=\{x|x \in A$ или $x \in B\}$.

Пересечением множеств A и B называется множество C, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат каждому из множеств A, B. Обозначение: $C=A \bigcap B$. Символическая запись: $A \bigcap B=\{x|x \in A$ и $x \in B\}$.

Разностью множеств A и B называется множество C, состоящее из всех тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B. Обозначение: $C=A \setminus B$. Символическая запись: $A \setminus B=\{x|x \in A$ и $x \notin B\}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество C, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат только одному из множеств A, B. Обозначение: $C= A \div B$. Символическая запись: $A \div B=\{x|x \in A$ и $x \notin B$ или $x \notin A$ и $x \in B\}=(A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$.

Дополнением к множеству A называется множество, состоящее из всех тех элементов множества **U**, которые не принадлежат множеству A. Обозначение: $\overline{A}$ Символическая запись: $\overline{A}=\mathbf{U}\setminus A$.

Старшинство операций (операции даны по убыванию приоритетов)

$\overline{\ }$	$\setminus$	$\cap$	$\cup$	$\div$

Введем обозначения для наиболее часто используемых множеств:

N – множество всех натуральных чисел;
Z – множество всех целых чисел;
$\mathbf{Z}^+$ – множество целых неотрицательных чисел ($\mathbf{Z}^+=\mathbf{N}\cup\{0\}$);
$\mathbf{Z}^-$ – множество целых неположительных чисел ($\mathbf{Z}^-=\mathbf{Z}\setminus\mathbf{N}$);
Q – множество всех рациональных чисел;
R – множество всех действительных чисел;
$\mathbf{R}^+$ – множество неотрицательных действительных чисел;
$\mathbf{R}^-$ – множество неположительных действительных чисел.

Иллюстрация операций над множествами.

Операции множеств и связанные с ними соотношения представляются наглядно с помощью диаграмм Эйлера-Венна (названных по имени русского математика Леонарда Эйлера (1707-1783гг.) и английского логика Джона Венна (1834-1923гг.). На этих диаграммах любые множества изображаются кругами, пересекающими друг друга, исходя из того, что внутренними точками круга изображаются элементы множества. Общей частью двух кругов, пересекающих друг друга, представляются возможные общие элементы двух множеств. Универсальное множество изображается в виде прямоугольника.

Основные законы теории множеств.

1. Коммутативность операций $\cup$ и $\cap$:

$A\cup B=B\cup A$ $\qquad$ $A\cap B=B\cap A$

2. Ассоциативность операций $\cup$ и $\cap$:

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ $\qquad$ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

3. Законы идемпотентности операций $\cup$ и $\cap$:

$A\cup A=A$ $\qquad$ $A\cap A=A$

4. Законы дистрибутивности:

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $\qquad$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

5. Законы поглощения:

$A\cup(A\cap B)=A$ $\qquad$ $A\cap(A\cup B)=A$

6. Законы де Моргана:

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

7. Законы пустого и универсального множеств:

$A \cup \varnothing = A$ $\qquad$ $A \cap \varnothing = \varnothing$ $\qquad$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$

$A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$ $\qquad$ $A \cap \mathbf{U} = A$ $\qquad$ $A \cup \overline{A} = \mathbf{U}$

$\overline{\mathbf{U}} = \varnothing$ $\qquad$ $\overline{\varnothing} = \mathbf{U}$

8. Закон двойного отрицания:

$\overline{\overline{A}} = A$

1.2. ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ОТНОШЕНИЯ.

Декартовым или *прямым* произведение множеств A_1, A_2, ... , A_n называется множество $\{(x_1,x_2,...,x_n)|x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2,\ ...\ ,\ x_n \in A_n\}$, обозначаемое через $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ или $\prod_{k=1}^{n} A_k$.

Если $A_1=A_2=...=A_n$, то множество $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ называется n*-ой декартовой степенью* множества A и обозначается A^n. Положим по определению $A^0=\varnothing$.

N*-местным отношением* P или n*-местным предикатом* P на множествах A_1, A_2, ... , A_n называется любое подмножество прямого произведения $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. Элементы x_1, x_2, ... , x_n (где $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, ... , $x_n \in A_n$) называются связанными соотношением P тогда и только тогда, когда $(x_1, x_2, ... , x_n) \in P$.

При n=1 отношением P является подмножеством множества A_1 и называется *унарным отношением*, или *свойством*, на множестве A_1.

При n=2 отношением P называется *бинарным отношением*.

Отношение $P \subset A^n$ называется n*-местным отношением (предикатом) на множестве* A.

Бинарные отношения.

Пусть P – некоторое бинарное отношение.

Областью определения P называется множество

$\delta_P=\{x|(x,y) \in P$ для некоторого $y\}$.

Областью значений P называется множество

$\rho_P=\{y|(x,y) \in P$ для некоторого $x\}$.

Обратным к P отношением называется множество

$P^{-1}=\{(y,x)|(x,y) \in P\}$.

Образом множества X относительно P называется множество

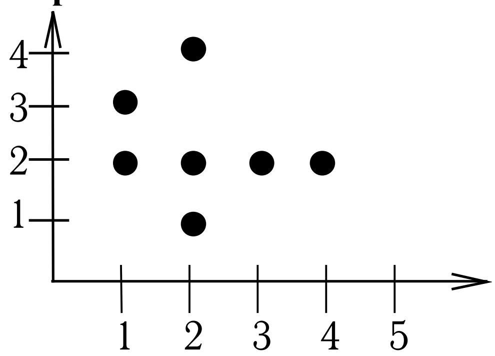
$$P(X)=\{y|(x,y)\in P \text{ для некоторого } x\in X\}.$$

Множество $P^{-1}(X)$ называется *прообразом множества X* относительно P.

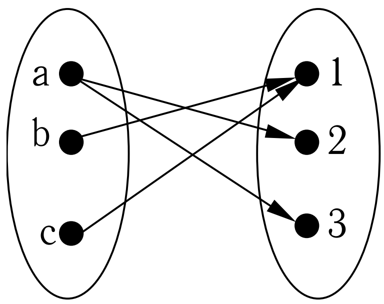
Произведением бинарных отношений $P_1\subset A\times B$ и $P_2\subset B\times C$ называется множество $P_3=P_1\circ P_2$, где $P_3\subset A\times C$ и $P_3=\{(x,y)|x\in A,\ y\in C$ и найдется $z\in B$ такой, что $(x,z)\in P_1$ и $(z,y)\in P_2\}$.

Графические способы изображения бинарных отношений

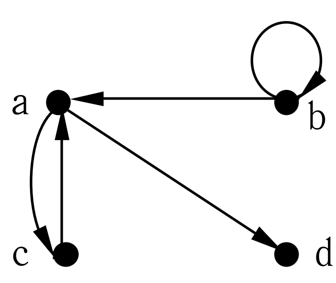
I. Если $P\subset A\times B$, A и B – числовые множества, то отношение $P=\{(2,1), (1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (1,3), (2,4)\}$ можно изобразить как множество точек на плоскости, где каждая точка представляет собой пару из множества P.



II. Если $P\subset A\times B$, $A=\{a, b, c\}$, $B=\{1, 2, 3\}$ и $P=\{(a,2), (a,3), (b,1), (c,1)\}$.



III. Если $P\subset A^2$, $A=\{a, b, c, d\}$ и $P=\{(a, c), (c, a), (b, a), (b, b), (a, b)\}$.



1.3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Специальным называется бинарное отношение на непустом множестве A, т. е. отношение $P\subset A^2$, $A\neq\varnothing$.

Для любого множества A определим *тождественное* отношение $id_A=\{(x,x)|x\in A\}$ (id_A также называют *диагональю*) и *универсальное* отношение $u_A=A^2$ (u_A также называют *полным* отношением).

Отношение P называется *рефлексивным*, если $(x,x)\in P$ для всех $x\in A$.

Отношение P называется *иррефлексивным*, если $(x,x)\notin P$ для всех $x\in A$.

Отношение P называется *симметричным*, если из того, что $(x,y)\in P$, следует, что $(y,x)\in P$.

Отношение P называется *антисимметричным*, если из того, что $(x,y)\in P$ и $(y,x)\in P$, следует, что $x=y$.

Отношение P называется *транзитивным*, если из того, что $(x, y)\in P$ и $(y, z)\in P$, следует, что $(x,z)\in P$.

Отношение P называется *эквивалентностью*, если оно является рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Примеры специальных бинарных отношений.

Пусть $P\subset A^2$, где $A=\{1, 2, 3\}$. Тогда

1) $P=\{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$ – рефлексивно, симметрично, транзитивно.
2) $P=\{(1,2), (2,3), (1,3)\}$ – иррефлексивно, антисимметрично, транзитивно.
3) $P=\{(1,1), (2,3), (3,1)\}$ – антисимметрично.
4) $P=\{(2,1), (1,2)\}$ – иррефлексивно, симметрично.
5) $P=A^2$ – эквивалентность.

1.4. ФУНКЦИИ.

Отношение f называется *функцией* из A в B, если $\delta_f=A$, $\rho_f\subset B$ и для всех x, y_1, y_2 из того, что $(x, y_1)\in f$ и $(x, y_2)\in f$, следует $y_1=y_2$. Если f функция, то вместо $(x, y)\in f$ пишем $y=f(x)$ и y называют *значением* функции f при значении аргумента x.

Функция f называется *инъекцией*, если для всех x_1, x_2 из того, что $x_1\neq x_2$, следует $f(x_1)\neq f(x_2)$.

Функция f называется *сюръекцией*, если $\rho_f=B$.

Функция f называется *биекцией* (взаимно однозначным соответствием между множествами A и B), если она инъективна и сюръективна.

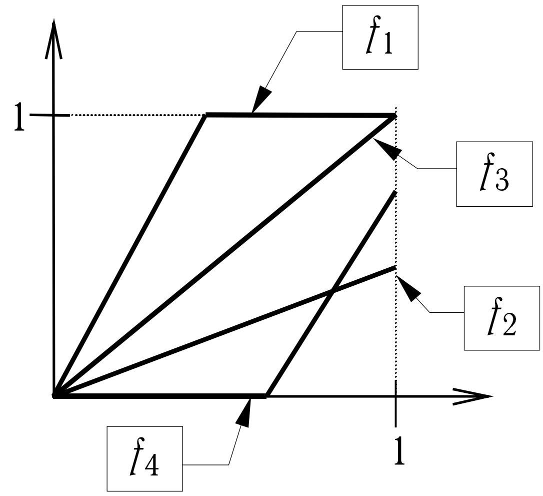
Характеристической функцией множества A называется функция:

$$\chi_A=\begin{cases}1, \text{ если } x\in A,\\ 0, \text{ если } x\notin A.\end{cases}$$

Функция f называется функцией n переменных, если $\delta_f=A^n$, $\rho_f\subset A$.

Пример 1.

$f_i : [0,1] \to [0,1]$
f_1 – сюръекция, не инъекция;
f_2 – инъекция, не сюръекция;
f_3 – биекция;
f_4 – не сюръекция, не инъекция;



Пример 2. Функция $f(n) = \begin{cases} m, & \text{если } n = 2m-1 \\ -m, & \text{если } n = 2m \end{cases}$ есть биекция между множествами **N** и **Z**.

1.5. КАРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И СЧЁТНОСТЬ

Два множества A и B имеют одну и ту же *мощность* (*кардинальное число*), если существует взаимно однозначное соответствие между элементами этими множествами. В этом случае говорят, что A и B *эквивалентны* (обозначают $A \sim B$). A есть *бесконечное множество*, если оно имеет ту же мощность, что и хотя бы одно их его собственных подмножеств; в противном случае A – *конечное счётное множество*.

Бесконечное множество A *счётно*, если можно установить взаимно однозначное соответствие между ним и множеством натуральных чисел. Каждое кардинальное число конечного множества тождественно с числом его элементов.

Задачи

1. Определить множества:
   1) $\{x | y \in \mathbf{Z}, x=5y\} \setminus \{x | y \in \mathbf{Z}, x=10y\}$;
   2) $\{x | n \in \mathbf{N}, x=4n+2\} \cap \{x | n \in \mathbf{N}, x=3n\}$;
   3) $\{x | y \in \mathbf{Z}$ и $x=2y\} \cap \{x | y \in \mathbf{Z}$ и $x=3y\}$;
   4) $\{x | y \in \mathbf{Z}$ и $x=2y\} \cup \{x | y \in \mathbf{Z}$ и $x=3y\}$;
2. Задать множества перечислением их элементов и найти $B \cap C$, $A \cup B$, $(A \cup B) \cap C$, $A \cap B \cap C$:
   1) если A – множество делителей числа 12; $B=\{1,5\}$; C – множество нечетных чисел x таких, что $2<x<13$;

2) если A – множество четных чисел x таких, что $3<x<10$; B – множество делителей числа 21; C – множество простых чисел, меньших 12.

3. Дать геометрическую интерпретацию множества $A\cap B\setminus C$, если $A=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}$ и $|x|\le 4,\ |y|\le 4\}$; $B=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R},\ x^2+y^2\le 25\}$; $C=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}$ и $y>0\}$.

4. Изобразить на координатной прямой множества $A\cup\overline{B}$, $\overline{A}\cap B$ и $\overline{A\cap B}$, если:
   1) $A=\{x|x\in\mathbf{R}$ и $x\in\,]-1,0]\}$ и $B=\{x|x\in\mathbf{R}$ и $x\in[0,2[\}$,
   2) $A=\{x|x\in\mathbf{R}$ и $x\in\,]-\infty,1]\}$ и $B=\{x|x\in\mathbf{R}$ и $x\in\,]-\infty,-3[\}$.

5. Доказать, что:
   1) $A\subset A$;
   2) если $A\subset B$ и $B\subset C$, то $A\subset C$;
   3) $A\cap B\subset A\subset A\cup B$;
   4) $A\cap B\subset B\subset A\cup B$;
   5) $A\setminus B\subset A$.

6. Определить, какой знак из множества $\{=,\ \neq,\ \supset,\ \subset\}$ можно поставить вместо символа «?», чтобы полученное утверждение было верным.
   1) $\{1, 3\}$ **?** $\{1, 2, 3\}$,
   2) $\{2, 3, 4\}$ **?** $\{1, 2, 3\}$,
   3) $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$ **?** $\{1, 2, 3\}$,
   4) $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ **?** $\{1, 2, 3\}$,
   5) $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$ **?** $\{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$,
   6) $\{(2, 1), (3, 2)\}$ **?** $\{(1, 2), (2, 3)\}$,
   7) $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ **?** $\{\{2, 1\}, \{3, 2\}, \{1, 3\}\}$,
   8) $\{1, 2, 3\}$ **?** $\{x|x$ делитель $6\}$,
   9) $\varnothing$ **?** $\{\varnothing\}$.

7. Существуют ли такие множества A, B и C, что $A\cap B\neq\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$, $(A\cap B)\setminus C=\varnothing$?

8. Какие из утверждений верны для всех A, B и C?
   1) если $A\in B$ и $B\in C$, то $A\in C$,
   2) если $A\subset B$ и $B\in C$, то $A\in C$,
   3) если $A\cap B\subset\overline{C}$ и $A\cup C\subset B$, то $A\cap C=\varnothing$,
   4) если $A\neq B$ и $B\neq C$, то $A\neq C$,
   5) если $A\subset\overline{(B\cup C)}$ и $B\subset\overline{(A\cup C)}$, то $B=\varnothing$.

9. Доказать, что:
   1) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$,
   2) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$,
   3) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$,
   4) $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$,
   5) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)=(A\cap B)\setminus C$,
   6) $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$,
   7) $A\cup B=A\cup(B\setminus A)$,
   8) $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A$,
   9) $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})=A$,
   10) $(\overline{A}\cup B)\cap A=A\cap B$,
   11) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$,
   12) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$,

13) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$,

14) $A\cup B\subset C\Leftrightarrow A\subset C$ и $B\subset C$,

15) $A\subset B\cap C\Leftrightarrow A\subset B$ и $A\subset C$,

16) $A\subset B\cup C\Leftrightarrow A\cap\overline{B}\subset C$,

17) $A\subset B\Rightarrow C\setminus B\subset C\setminus A$,

18) $A\subset B\Rightarrow\overline{B}\subset\overline{A}$,

19) $A\cup B=A\cap B\Rightarrow A=B$,

20) $A=\overline{B}\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$ и $A\cup B=\mathbf{U}$,

21) $A\div(B\div C)=(A\div B)\div C$,

22) $A\div(A\div B)=B$,

23) $A\cup B=A\div B\div(A\cap B)$,

24) $A\cup B=(A\div B)\cup(A\cap B)$,

25) $A\setminus B=A\div(A\cap B)$,

26) $A\div B=\varnothing\Leftrightarrow A=B$,

27) $A\cap B=\varnothing\Rightarrow A\cup B=A\div B$,

28) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

29) $(A\cup B)\cap A=(A\cap B)\cup A=A$,

30) $A\cap(B\setminus A)=\varnothing$,

31) $(A\cap B)\cup(C\cap D)=(A\cup C)\cap(B\cup C)\cap(A\cup D)\cap(B\cup D)$.

10. Доказать, что: $A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\setminus B=\varnothing\Leftrightarrow\overline{A}\cup B=\mathbf{U}$.

11. Доказать следующие тождества:

1) $\bigcup\limits_{k\in K}\bigcup\limits_{t\in T}A_{kt}=\bigcup\limits_{t\in T}\bigcup\limits_{k\in K}A_{kt}$,

2) $\bigcap\limits_{k\in K}\bigcap\limits_{t\in T}A_{kt}=\bigcap\limits_{t\in T}\bigcap\limits_{k\in K}A_{kt}$,

3) $\overline{\bigcup\limits_{k\in K}A_k}=\bigcap\limits_{k\in K}\overline{A_k}$,

4) $\overline{\bigcap\limits_{k\in K}A_k}=\bigcup\limits_{k\in K}\overline{A_k}$,

5) $\bigcup\limits_{k\in K}A_k\cup\bigcup\limits_{k\in K}B_k=\bigcup\limits_{k\in K}(A_k\cup B_k)$,

6) $\bigcup\limits_{k\in K}\bigcap\limits_{t\in T}A_{kt}\subset\bigcap\limits_{t\in T}\bigcup\limits_{k\in K}A_{kt}$,

7) $\bigcup\limits_{k\in K}(B\cap A_k)=B\cap\left(\bigcup\limits_{k\in K}A_k\right)$,

8) $\bigcap\limits_{k\in K}(B\cup A_k)=B\cup\left(\bigcap\limits_{k\in K}A_k\right)$.

12. Доказать, что:

1) $\bigcup\limits_{i\in I}A_i$ есть наименьшее множество, содержащее все множества A_i;

2) $\bigcap\limits_{i\in I}A_i$ есть наибольшее множество, содержащееся во всех множествах A_i.

13. Найти булеаны следующих множеств $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{x\}$, $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$.

14. Доказать, что:

1) $\boldsymbol{P}(A\cap B)=\boldsymbol{P}(A)\cap\boldsymbol{P}(B)$,

2) $\boldsymbol{P}\left(\bigcap\limits_{i\in I}A_i\right)=\bigcap\limits_{i\in I}\boldsymbol{P}(A_i)$,

3) $\boldsymbol{P}(A\cup B)=\{A_1\cup B_1|A_1\in\boldsymbol{P}(A)$ и $B_1\in\boldsymbol{P}(B)\}$,

4) $\boldsymbol{P}\left(\bigcup\limits_{i\in I}A_i\right)=\left\{\bigcup\limits_{i\in I}B_i\,\middle|\,B_i\in\boldsymbol{P}(A_i)\right\}$.

15. Доказать, что существуют A, B и C такие, что:

1) $A\times B\neq B\times A$,
2) $A\times B=B\times A$,
3) $A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C$,
4) $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$.

16. Пусть A – множество точек отрезка [0, 1]; B – множество точек отрезка [2, 3]; C={4, 5, 6}; D – множество точек квадрата с вершинами в точках (0,0), (0,1), (1,0), (1,1). Найти геометрическую интерпретацию множеств:

1) $A\times B$,
2) $A\times C$,
3) $C\times B$,
4) $A\times D$,
5) $C\times D$,
6) $D\times B$,

17. Доказать, что $(A\times B)\bigcup(C\times D)\subset(A\bigcup C)\times(B\bigcup D)$. При каких A, B, C, D включение можно заменить равенством?

18. Доказать, что для произвольных A, B, C, D:

1) $(A\bigcup B)\times C=(A\times C)\bigcup(B\times C)$,
2) $(A\backslash B)\times C=(A\times C)\backslash(B\times C)$,
3) $A\times(B\backslash \mathrm{C})=(A\times B)\backslash(A\times C)$,
4) $(A\bigcap B)\times(C\bigcap D)=(A\times C)\bigcap(B\times D)$,
5) $A\times B=(A\times D)\bigcap(C\times B)$, где $A\subset C$ и $B\subset D$.

19. Пусть $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$ и $(A\times B)\bigcup(B\times A)=C\times D$. Доказать, что в этом случае $A=B=C=D$.

20. Найти $P\circ S$, $(P\circ S)^{-1}$ если:

1) $S=\{(x,y)|x\in Y,\ y\in Z$ и окружность x вписана в треугольник $y\}$; $P=\{(x,y)|x\in X,\ y\in Y$ и x центр окружности $y\}$, где X – множество точек плоскости, Y – множество окружностей, Z – множество треугольников;
2) $S=\{(x,y)|x\in Y,\ y\in Z$ и дисциплина x преподается студентам группы $y\}$; $P=\{(x,y)|x\in X,\ y\in Y$ и преподаватель x ведет занятия по дисциплине $y\}$, где X – множество преподавателей института, Y – множество читаемых дисциплин, Z – множество академических групп;
3) $S=\{(x,y)|x\in Y,\ y\in Z$ и x родитель $y\}$; $P=\{(x,y)|x\in X,\ y\in Y$ и x отец $y\}$; где X – множество мужчин, Y – множество людей, Z – множество женщин.

21. Найти δ_P, ρ_P, P^{-1}, $P\circ P$, $P^{-1}\circ P$, $P\circ P^{-1}$ для отношений:

1) P={(x,y)|x,y$\in\mathbf{N}$ и x делит y},
2) P={(x,y)|x,y$\in\mathbf{R}$ и x+y≤0},
3) P={(x,y)|x,y$\in\mathbf{R}$ и x+y>0},
4) P={(x,y)|x,y$\in\mathbf{R}$ и x+y>2},
5) P={(x,y)|x,y$\in\mathbf{R}$ и 3x≥5y},
6) P={(x,y)|x,y$\in\mathbf{R}$ и 3x<5y},
7) P={(x,y)|x,y$\in\mathbf{R}$ и 2x>3y},
8) P={(x,y)|x,y$\in\mathbf{R}$ и 2x≤3y},
9) P={(x,y)|x,y$\in\mathbf{R}$ и x≤y},
10) P={(x,y)|x,y$\in\mathbf{R}$ и x>y},

11) P={(x,y)|x,y∈**R** и xy≤–5},
12) P={(x,y)|x,y∈**R** и xy>–5},
13) P={(x,y)|x,y∈**R** и xy≤20},
14) P={(x,y)|x,y∈**R** и x^2<y},
15) P={(x,y)|x,y∈[–π/2, π/2] и y≥sinx}.

22. Доказать, что если $R_1 \subset R_2$, то
1) $Q \circ R_1 \subset Q \circ R_2$, 2) $R_1 \circ Q \subset R_2 \circ Q$, 3) $R_1^{-1} \subset R_2^{-1}$.

23. Доказать, что для любых бинарных отношений:
1) $\left(R_1 \cap R_2\right)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$,
2) $\overline{R^{-1}} = \left(\overline{R}\right)^{-1}$,
3) $R_1 \circ \left(R_2 \circ R_3\right) = \left(R_1 \circ R_2\right) \circ R_3$,
4) $\left(R_1 \circ R_2\right)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$.

24. Пусть *X* – множество геометрических фигур. Какими свойствами обладает бинарное отношение *R*={(*x*,*y*)|*x*,*y*∈*X* и фигура x конгруэнтна фигуре *y*}?

25. Пусть *X* – множество прямых. Какими свойствами обладают бинарные отношения:
1) *R*={(*x*,*y*)|*x*,*y*∈*X* и *x* параллельна *y*},
2) *R*={(*x*,*y*)|*x*,*y*∈*X* и *x* перпендикулярна *y*}?

26. Пусть *X* – множество людей. Какими свойствами обладают следующие бинарные отношения:
1) R={(x,y)|x,y∈X и x моложе y},
2) R={(x,y)|x,y∈X и x брат y},
3) R={(x,y)|x,y∈X и x похож на y}.
4) R={(x,y)|x,y∈X и x состоит в браке с y},
5) R={(x,y)|x,y∈X и x живет в одном городе с y}?

27. Какими свойствами обладают отношения:
1) *R*={((*x*,*y*),(*u*,*v*))|(*x*,*y*),(*u*,*v*)∈Z^2 и *xv*=*yu*},
2) R={((*x*,*y*),(*u*,*v*))|(*x*,*y*),(*u*,*v*)∈Z^2 и *x*+*u*=*y*+*v*},
3) R={((*x*,*y*),(*u*,*v*))|(*x*,*y*),(*u*,*v*)∈N^2 и *x*+*v*=*y*+*u*}?

28. Доказать, что если отношения *R* и *S* рефлексивны, то рефлексивны и отношения $R \cup S$, $R \cap S$, R^{-1}, $R \circ S$.

29. Доказать, что если отношения *R* и *S* иррефлексивны, то иррефлексивны и отношения $R \cup S$, $R \cap S$, R^{-1}.

30. Доказать, что если отношения *R* и *S* симметричны, то симметричны и отношения $R \cup S$, $R \cap S$, R^{-1}, $R \circ R^{-1}$.

31. Доказать, что если отношения *R* и *S* антисимметричны, то антисимметричны и отношения $R \cap S$, R^{-1}.

32. Постройте бинарное отношение, обладающее следующими свойствами, или докажите, что такого не существует:

№	Свойства				
	рефлексивность	иррефлек–сивность	симметричность	антисим-метричность	транзитивность
1	+	–	–	–	–
2	–	+	–	–	–
3	–	–	–	–	–
4	+	–	–	–	+
5	–	+	–	–	+
6	–	–	–	–	+
7	+	–	+	–	–
8	–	+	+	–	–
9	–	–	+	–	–
10	+	–	+	–	+
11	–	+	+	–	+
12	–	–	+	–	+
13	+	–	–	+	–
14	–	+	–	+	–
15	–	–	–	+	–
16	+	–	–	+	+
17	–	+	–	+	+
18	–	–	–	+	+
19	+	–	+	+	–
20	–	+	+	+	–
21	–	–	+	+	–
22	+	–	+	+	+
23	–	+	+	+	+
24	–	–	+	+	+

Например, в первом варианте требуется построить рефлексивное, но не иррефлексивное, не симметричное, не антисимметричное, не транзитивное бинарное отношение.

33. Пусть X – конечное множество и отображение f: $X\to X$ инъективно. Доказать, что f биективно.

34. Пусть f – функция. При каких условиях f^{-1} является функцией?

35. Доказать, что для любой функции f и произвольных A и B:

1) $f(A\bigcup B)=f(A)\bigcup f(B)$,
2) $f(A\bigcap B)\subset f(A)\bigcap f(B)$,
3) $f(A)\backslash f(B)\subset f(A\backslash B)$,
4) $f^{-1}(A\bigcup B)=f^{-1}(A)\bigcup f^{-1}(B)$,
5) $f^{-1}(A\bigcap B)=f^{-1}(A)\bigcap f^{-1}(B)$,
6) $f^{-1}(A\backslash B)=f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B)$.

36. Доказать, что если $A\subset B$, то $f^{-1}(A)\subset f^{-1}(B)$ для любой функции f.

37. Пусть известны характеристические функции множеств A и B. Доказать, что:

1) $\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\chi_B(x)$,
2) $\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_A(x)\chi_B(x)$,
3) $\chi_{\overline{A}}(x)=1-\chi_A(x)$,
4) $\chi_{A\backslash B}(x)=\chi_A(x)-\chi_A(x)\chi_B(x)$.

38. Доказать, что

1) $A \sim A$;

1) если $A \sim B$, то $B \sim A$;

2) если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

39. Пусть $A \subset A_1$, $A_1 \subset A_2$ и $A \sim A_2$. Доказать, что $A \sim A_1$.

40. Доказать, что:

1) всякое подмножество конечного множества конечно;
2) объединение конечного числа конечных множеств конечно;
3) прямое произведение конечного числа конечных множеств конечно.

41. Доказать, что:

1) если A счётно, а B конечно, то $A \backslash B$ счётно;
2) если A и B счётны, то $A \bigcup B$ счётно;
3) если все A_i конечны, не пусты и попарно не пересекаются, то $\bigcup\limits_{i \in N} A_i$ счетно;
4) если все A_i счётны, то $\bigcup\limits_{i \in N} A_i$ счётно.

42. Доказать, что:

1) множество целых чисел счётно;
2) множество рациональных чисел счётно;

2. ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

2.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Переключательными функциями называют функции, область значений которых есть подмножество двухэлементного множества $\{0,1\}$, а область определения – $\{0,1\}^n$, где n – число переменных. Каждая комбинация значений переменных называется *набором*. Множество наборов переменных образует *область определения функции*. Иногда множество наборов переменных интерпретируют как вершины n-мерного куба.

Наборы и соответствующие им значения функции составляют *таблицу истинности функции*.

Переключательные функции двух аргументов определяются следующим образом.

№	x: 0011 y: 0101	Обозначения функции	Названия функции
0	0000	const 0	Константа 0
1	0001	$x \wedge y$, xy	Конъюнкция, функция ‘и’
2	0010	$x \leftarrow y$, $x\overline{y}$	Запрет ‘y’
3	0011	x	Повтор ‘x’
4	0100	$x \rightarrow y$, $\overline{x}y$	Запрет ‘x’
5	0101	y	Повтор ‘y’
6	0110	$x \oplus y$	Сумма по модулю 2, разделительное ‘или’
7	0111	$x \vee y$	Дизъюнкция, соединительное ‘или’
8	1000	$x \downarrow y$	Стрелка Пирса
9	1001	$x \sim y$, $x \Leftrightarrow y$	Эквивалентность
10	1010	$\overline{y}$, $\neg y$	Отрицание y, функция ‘не’
11	1011	$x \subset y$, $x \Leftarrow y$	Обратная импликация
12	1100	$\overline{x}$, $\neg x$	Отрицание x, функция ‘не’
13	1101	$x \supset y$, $x \Rightarrow y$	Прямая импликация
14	1110	x/y	Штрих Шеффера
15	1111	const 1	Константа 1

Две переключательные функции называются *равносильными*, если они на одних и тех же наборах имеют одни и те же значения.

Количество различных переключательных функций n аргументов определяется как $S = 2^{\left(2^n\right)}$.

Основные теоремы переключательных функций:

1) $\overline{1} = 0$, $\overline{0} = 1$, $\overline{\overline{x}} = x$
2) $\overline{x / y} = xy$, $\overline{xy} = x / y$
3) $\overline{x \sim y} = x \oplus y$, $\overline{x \oplus y} = x \sim y$
4) $\overline{x \downarrow y} = x \vee y$, $\overline{x \vee y} = x \downarrow y$
5) $\overline{x \supset y} = x \leftarrow y$, $\overline{x \leftarrow y} = x \supset y$
6) $y \rightarrow x = x \leftarrow y$, $y \subset x = x \supset y$
7) $x \oplus x = 0$, $x \oplus 1 = \overline{x}$, $x \oplus 0 = x$
8) $y \vee x = x \oplus y \oplus xy$
9) $x\left(y \oplus z\right) = xy \oplus xz$

10) $x / x = \overline{x}$

11) $x \supset y = \overline{x} \vee y$

12) $x \oplus y = \overline{x}y \vee x\overline{y}$

Старшинство операций (операции даны по убыванию приоритетов)

$\neg$	$/$	$\downarrow$	$\rightarrow$ $\leftarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\oplus$	$\supset$ $\subset$	$\sim$

2.2. БУЛЕВЫ ФОРМУЛЫ

Обозначим $x^{\alpha} = \begin{cases} x, & \alpha = 1 \\ \overline{x}, & \alpha = 0 \end{cases}$.   Очевидно, что $x^{\alpha} = \begin{cases} 1, & x = \alpha \\ 0, & x \neq \alpha \end{cases}$.

Конституентой единицы (K^1) данного набора (α_1, α_2,..., α_n) называется конъюнкция всех переменных, образующих этот набор

$$K^1(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}.$$

На произвольном фиксированном наборе $x_1=\beta_1$, $x_2=\beta_2$, ... , $x_n=\beta_n$ имеем для конституенты единицы данного набора

$$K^1(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2} ... \beta_n^{\alpha_n} = \begin{cases} 1, & \text{если } \beta_1 = \alpha_1, \ldots, \beta_n = \alpha_n \\ 0, & \text{если } \beta_1 \neq \alpha_1, \ldots, \text{ или } \beta_n \neq \alpha_n \end{cases}$$

Лемма. Конституента единицы равна единице только на одном наборе.

Конституентой нуля (K^0) данного набора (α_1, α_2,..., α_n) называется дизъюнкция всех переменных, образующих этот набор

$$K^0(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{x_1^{\alpha_1}} \vee \overline{x_2^{\alpha_2}} \vee ... \vee \overline{x_n^{\alpha_n}}$$

На произвольном фиксированном наборе $x_1=\beta_1$, $x_2=\beta_2$, ... , $x_n=\beta_n$ имеем для конституенты нуля данного набора

$$K^0(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \beta_1^{\alpha_1} \vee \beta_2^{\alpha_2} \vee ... \vee \beta_n^{\alpha_n} = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta_1 = \alpha_1, \ldots, \beta_n = \alpha_n \\ 1, & \text{если } \beta_1 \neq \alpha_1, \ldots, \text{ или } \beta_n \neq \alpha_n \end{cases}$$

Лемма. Конституента нуля равна нулю только на «своем» наборе.

Теорема. Всякая переключательная функция, не равная тождественно 0, представима и притом однозначно в совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ). СДНФ есть дизъюнкция конституент единицы тех наборов, где функция равна единице $f_{\text{СДНФ}}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \underset{f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=1}{\vee K^1}$

Теорема. Всякая переключательная функция, не равная тождественно 1, представима и притом однозначно в совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ). СКНФ есть конъюнкция конституент нуля тех наборов, где функция равна нулю $f_{\text{СКНФ}}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \underset{f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=0}{\wedge K^0}$

Поскольку существует взаимно однозначное соответствие между таблицей истинности функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и ее СДНФ (СКНФ) и, следовательно, СДНФ (СКНФ) для всякой логической (переключательной) функции единственны с точностью до порядка букв и конъюнкций (дизъюнкций) (ввиду коммутативности дизъюнкции и конъюнкции), формулы, получаемые перестановкой конъюнкт и дизъюнкт не различаются и считаются одной и той же СДНФ (СКНФ).

Формулы, содержащие, кроме переменных и скобок, только знаки функций $\wedge$, $\vee$, $\neg$ будем называть *булевыми формулами*.

Теорема. Всякая логическая функция может быть представлена булевой формулой, т.е. как суперпозиция функций $\wedge$, $\vee$, $\neg$.

Алгебра, основным множеством которой является все множество логических функций, а операциями – дизъюнкция, конъюнкция и отрицание, называется *булевой алгеброй логических функций*.

Фактически мы имеем дело не с самими функциями в чистом виде, а с представляющими их формулами, которых гораздо больше, чем функций, – ведь каждую функцию представляет бесконечное множество формул. Поэтому элементами основного множества алгебры формул объявляются не формулы, а классы эквивалентности формул, т.е. классы формул, представляющих одну и ту же функцию.

Правило подстановки: При подстановке формулы F вместо переменной x **все** вхождения переменной x в исходное соотношение должны быть одновременно заменены формулой F.

Аксиомы отрицания:

$\bar{1} = 0$ $\qquad$ $\bar{0} = 1$ $\qquad$ $\bar{\bar{x}} = x$

Аксиомы конъюнкции и дизъюнкции

Аксиомы конъюнкции:	Аксиомы дизъюнкции:	
$x \wedge y = y \wedge x$	$x \vee y = y \vee x$	коммутативность
$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	ассоциативность
$x \wedge x = x$	$x \vee x = x$	идемпотентность
$x \wedge (y \vee z) = x \wedge y \vee x \wedge z$	$x \vee y \wedge z = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	диструбутивность
$x \wedge (x \vee y) = x$	$x \vee x \wedge y = x$	поглощение
$x \wedge 1 = x$ $x \wedge 0 = 0$	$x \vee 1 = 1$ $x \vee 0 = x$	аксиомы 0 и 1
$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$	$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$	законы де Моргана
аксиома «исключенного третьего»: $x \vee \overline{x} = 1$	аксиома «противоречия»: $x \wedge \overline{x} = 0$	

Минимизация булевых функций

Каждая булева функция имеет конечное число вхождений переменных. Под *числом вхождений переменной* понимается число раз, которое она встречается в алгебраическом выражении этой функции с отрицанием или без. З*адача минимизации булевых функций* заключается в том, чтобы получить алгебраическое выражение булевой функции с наименьшим числом вхождений переменных.

Конъюнкция любого числа переменных, взятых по одному разу, с отрицанием или без отрицания, называется *элементарным произведением*.

Например, $x_1 x_3 \overline{x_2}$ – элементарное произведение, $x_1 x_2 \overline{x_3} x_1$– не является элементарным произведением.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) функции называется такая дизъюнкция нескольких различных элементарных произведений, что таблица истинности ДНФ совпадает с таблицей истинности самой функции. ДНФ может состоять из одного элементарного произведения.

Импликантой $f_2(x_1, x_2,..., x_n)$ данной функции $f_1(x_1, x_2,..., x_n)$ называется функция со следующими свойствами:

$$f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 0, \text{ на наборах, где } f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ 0 \text{ или } 1, \text{ на наборах, где } f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 1 \end{cases}$$

Лемма. Функция g является импликантой функции f тогда и только тогда, когда переключательная функция $g \supset f$ равна const1.

Лемма. Если функция g – импликанта функции f и $g = a \vee b$, где a и b – произвольные функции, то a и b также являются импликантами функции f.

Простой импликантой булевой функции называется элементарное произведение, которое является импликантой и никакая собственная часть которого не является импликантой.

Лемма. Конституенты единицы тех наборов, на которых данная функция равна единице, есть импликанты данной функции.

Лемма. Любая собственная часть конституенты единицы фиксированного набора сохраняет единицу на этом фиксированном наборе.

Теорема. Всякая булева функция представима и притом однозначно в виде некоторой *сокращенной дизъюнктивной нормальной формы (*Сокр. ДНФ*)*, где $f_{\text{Сокр.ДНФ}}(x_1, x_2,..., x_n)$ есть дизъюнкция всех простых импликант данной функции $f\ (x_1, x_2,..., x_n)$, при этом $f_{\text{Сокр.ДНФ}}(x_1, x_2,..., x_\text{n})$ равна $f\ (x_1, x_2,..., x_n)$.

Сокращенная ДНФ функции может содержать лишние импликанты. *Лишними импликантами* называются те, удаление которых из Сокр. ДНФ функции не изменяет ее таблицы истинности.

Форма булевой функции, полученная как дизъюнкция простых импликант, среди которых нет лишних, называется *тупиковой* ДНФ *(*ТДНФ*)*. Тупиковые ДНФ функции $f\ (x_1, x_2,..., x_n)$ могут содержать разное число вхождений переменных.

Выбор среди всех тупиковых ДНФ функции $f\ (x_1, x_2,..., x_n)$ формы с наименьшим числом вхождений переменных дает *минимальную дизъюнктивную нормальную форму (*МДНФ*)*. Необходимо отметить, что в общем случае у одной функции $f(x_1, x_2,..., x_n)$ может быть несколько различных МДНФ, но все они имеют одинаковое число вхождений переменных, причем наименьшее среди всех ДНФ функции $f(x_1, x_2,..., x_n)$.

Аналитические методы нахождения МДНФ.

Метод Квайна

Дает возможность нахождения Сокр. ДНФ из СДНФ функции.

Формулы метода:

$Ax \vee A\overline{x} = Ax \vee A\overline{x} \vee A$ – *неполное склеивание.*

$Ax \vee A = A$ – *поглощение.*

Алгоритм метода.

Шаг 1. Положить «формулу» равной СДНФ функции.

Шаг 2. Положить n равным числу переменных функции.

Шаг 3. Провести все возможные операции неполного склеивания для входящих в «формулу» элементарных произведений, содержащих ровно n переменных. Все получаемые элементарные произведения, ранее отсутствовавшие в «формуле», дописывать в нее через дизъюнкцию.

Шаг 4. Удалить из «формулы» все элементарные произведения, для которых операция неполного склеивания была проведена хотя бы один раз.

Шаг 5. Уменьшить n на 1.

Шаг 6. Если n равно 0 или на шаге 3 «формула» не изменилась, то алгоритм закончен, «формула» является дизъюнкцией **всех** простых импликант исходной функции. Иначе перейти на шаг 3.

Метод Блейка

Дает возможность нахождения Сокр. ДНФ из любой ДНФ функции.

Формулы метода:

$Ax \vee B\overline{x} = Ax \vee B\overline{x} \vee AB$ – обобщенное склеивание

$Ax \vee A = A$ – поглощение

Алгоритм метода.

Шаг 1. Положить «формулу» равной заданной ДНФ функции.

Шаг 2. Провести все возможные операции обобщенного склеивания для входящих в «формулу» элементарных произведений.

Шаг 3. Если на шаге 2 не появились новые элементарные произведения, то алгоритм закончен, «формула» является дизъюнкцией **всех** простых импликант исходной функции. Иначе переходим на шаг 4.

Шаг 4. Все полученные на шаге 2 элементарные произведения, ранее отсутствовавшие в «формуле», дописать в нее через дизъюнкцию.

Шаг 5. Провести в «формуле» все возможные операции поглощения и перейти на шаг 2.

Сравнение методов Квайна и Блейка.

Параметры	Метод Квайна	Метод Блейка
Область применения	СДНФ	Любая ДНФ
Формула склеивания	$Ax \vee A\overline{x} = Ax \vee A\overline{x} \vee A$	$Ax \vee B\overline{x} = Ax \vee B\overline{x} \vee AB$
Формула поглощения	$Ax \vee A = A$	$Ax \vee A = A$
Количество шагов	Не превышает число переменных функции	Заранее не известно
Результат алгоритма	Сокращенная ДНФ	Сокращенная ДНФ

Построение МДНФ из Сокр.ДНФ с помощью таблицы Квайна

Чтобы из $f_{\text{Сокр.ДНФ}}$ получить $f_{\text{МДНФ}}$, необходимо отбросить все лишние импликанты. Для этого используется *таблица Квайна*, заголовки строк которой – простые импликанты, а столбцов – конституенты единиц минимизируемой функции. На пересечении строки и столбца ставится *, если простая импликанта сохраняет единицу на том наборе, на котором конституента равна единице.

Алгоритм получения $f_{\text{МДНФ}}$ с помощью таблицы Квайна:

Шаг 1. Для всех столбцов, содержащих ровно одну *, выписать в $f_{\text{МДНФ}}$ (через $\vee$) соответствующие простые импликанты.

Шаг 2. Удалить из таблицы все столбцы, в которых на пересечении со строкой выбранных на шаге 1 простых импликант стоит *.

Шаг 3. Удалить из таблицы все строки, соответствующие выбранным на шаге 1 простым импликантам, а также все строки, в которых нет ни одной *.

Шаг 4. Повторять шаги 1–3 до тех пор, пока таблица изменяется.

Шаг 5. Из оставшихся строк перебором всех возможных вариантов выбрать минимальное по суммарному числу вхождений переменных множество простых импликант так, чтобы все оставшиеся столбцы имели на пересечении хотя бы с одной из выбранных строк *.

Графические методы минимизации булевых функций.

I. Минимизация функции на булевом кубе.

Рассматриваемый метод применим для функций, число переменных в которых не превышает 3. Общий алгоритм метода можно представить следующим образом.

Шаг 1. Нарисовать куб в пространстве, размерность которого равна числу переменных функции.

Шаг 2. Пометить синим кружком вершины куба, в которых функция равна 1.

Шаг 3. Положить n равным числу переменных функции.

Шаг 4. Отметить звездочкой все помеченные синим кружком вершины, которые могут быть вершиной куба размерности n, построенного на помеченных кружком вершинах.

Шаг 5. Среди множества кубов размерности n, вершинами которых являются помеченные кружком вершины, выбрать подмножество с минимальным числом элементов, покрывающее все помеченные звездочкой вершины. Импликанты, соответствующие выбранным кубам, приписать к искомой минимальной форме через дизъюнкцию.

Шаг 6. У всех вершин, помеченных звездочкой, поменять синий кружок на красный. Звездочки стереть.

Шаг 7. Если остались синие кружки, то уменьшить n на 1 и перейти на шаг 4.

II. Метод карт Карнафа.

Этот метод является обобщением метода графической минимизации на случай четырех переменных. *Картой Карнафа* для четырех переменных называется таблица 4×4, каждая клетка которой соответствует вершине четырехмерного куба, причем соответствие задается таким образом, что если склеить карту по вертикали и горизонтали в тор, то соседние клетки карты будут соответствовать соседним вершинам куба. Соответствие вершинам куба обычно задают явно, указывая координаты строк и столбцов таблицы. В клетках таблицы, соответствующих вершинам куба, в которых минимизируемая функция равна 1, проставляют $*$.Пример карты для функции f^4=(0010 1010 0100 0111) приведен на рисунке.

	$\bar{z}$	$\bar{z}$	z	z	
$\bar{x}$					$\bar{y}$
$\bar{x}$					y
x					y
x					$\bar{y}$
	$\bar{p}$	p	p	$\bar{p}$	

Будем называть *гранью* множество звездочек карты, соответствующее какой-либо грани куба (отметим, что грань на карте Карнафа – всегда множество соседних звездочек). Мощность грани может быть равна 1, 2, 2^2, ..., 2^n, где n – размерность функции. *Максимальной гранью* для конкретной звездочки карты будем называть грань с максимальной мощностью. Под *полезной мощностью* грани будем понимать количество ещё непокрытых звездочек, покрываемых данной гранью. Полезная мощность может быть равна 0, 2, 3, ..., m, где m – мощность данной грани. Обратим особое внимание на то, что полезная мощность определена только для максимальной грани. Причем независимо от шага алгоритма мощность максимальной грани для каждой звездочки одинакова (она зависит только от самой функции), а полезная мощность максимальной грани изменяется во время работы алгоритма, а по его завершению для всех звездочек равна 0.

Алгоритм минимизации по карте Карнафа

Шаг 1. Находим непокрытую, немаркированную звездочку. Если все звездочки покрыты, то stop. Если все непокрытые звездочки маркированы, то переходим на шаг 5.

Шаг 2. Среди всех возможных вариантов граней для данной звездочки выбираем грани, максимальные по мощности. Если такая грань единственная, то обводим ее и переходим на шаг 6.

Шаг 3. Среди граней максимальной мощности выбираем грань с максимальной полезной мощностью. Если такая грань единственная, то обводим ее и переходим на шаг 6.

Шаг 4. Маркировать звёздочку и перейти на шаг 1.

Шаг 5. Для произвольной непокрытой маркированной звездочки обводим любую из граней с максимальной полезной мощностью (отличной от нуля, так как сама звездочка еще не покрыта).

Шаг 6. Снять все маркировки. Перейти на шаг 1.

2.3. ПОЛНОТА СИСТЕМ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Система переключательных функций $F=\left(f_1, f_2,..., f_n\right)$ называется *полной*, если всякая переключательная функция является некоторой суперпозицией этих функций f_1, f_2, ... , f_n.

Классы Поста

I. Класс функций, сохраняющих нуль (**P_0**).

Переключательная функция называется *сохраняющей нуль*, если $f(0,0,...,0)=0$.

I. Класс функций, сохраняющих единицу (**P_1**).

Переключательная функция называется *сохраняющей единицу*, если $f(1,1,...,1)=1$.

III. Класс самодвойственных функций (**S**).

Функция $f^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *двойственной* к функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, если $f^*(x_1, x_2, ..., x_n)=\neg f(\neg x_1, \neg x_2, ..., \neg x_n)$. Переключательная функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *самодвойственной*, если $f^*(x_1, x_2, ..., x_n)=f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

IV. Класс монотонных функций (**M**).

Переключательная функция называется *монотонной*, если $f(\alpha_1\alpha_2 ... \alpha_n)\le f(\beta_1\beta_2 ... \beta_n)$ на всех сравнимых наборах, т.е. таких, что $(\alpha_1\alpha_2 ... \alpha_n)\le(\beta_1\beta_2 ... \beta_n)$, причем $(\alpha_1\alpha_2 ... \alpha_n)\le(\beta_1\beta_2 ... \beta_n)$, если при любом i: $\alpha_i\le\beta_i$.

IV. Класс линейных функций (**L**).

Переключательная функция называется *линейной*, если она представима линейным полиномом Жегалкина.

Теорема. Всякая булева функция представима *полиномом Жегалкина*, т.е. в виде $f(x_1, x_2,..., x_n)=a_0\oplus a_1x_1\oplus\ldots \oplus a_nx_n\oplus a_{n+1}x_1x_2\oplus\ldots\oplus a_{2n-1}x_1x_n\oplus$ $\oplus a_{2n}x_2x_3\oplus\ldots\oplus a_kx_1x_2\ldots x_n$, где $a_i\in\{0,1\}$.

Тождества, позволяющие преобразовать произвольную ДНФ в полином Жегалкина:

1) $x\vee y=x\oplus y\oplus xy$	1) $x\oplus\overline{x}=1$	1) $x\oplus x=0$
1) $\overline{x}=x\oplus 1$	1) $x\oplus 0=x$	1) $x(y\oplus z)=xy\oplus xz$

Отметим, что в СДНФ при построении полинома Жегалкина можно все '$\vee$' заменить на '$\oplus$', так как конъюнкция конституент разных наборов всегда равно нулю.

Полином Жегалкина называется *линейным*, если он не содержит произведения переменных, т.е. $a_i=0$ $\forall i>n$.

Лемма. Каждый класс Поста замкнут относительно операций подстановки и суперпозиции, т.е. с помощью этих операций можно получить только функции этого же класса.

Теорема Поста (сильная). Система переключательных функций тогда и только тогда является функционально полной, когда для каждого класса $\mathbf{P_0}$, $\mathbf{P_1}$, **S**, **M**, **L** в ней найдется функция, не принадлежащая этому классу.

Теорема Поста (слабая). Система переключательных функций, содержащая const 0 и const 1, является функционально полной тогда и только тогда, когда она содержит хотя бы одну нелинейную и хотя бы одну немонотонную функцию.

Система функций F называется *независимой*, если никакая функция $f \in F$ не представима суперпозициями функций из $F \setminus \{f\}$. Независимая система функций называется *базисом* класса K, если всякая функция из K есть суперпозиция функций из F. Система переключательных функций называется *базисом*, если она функционально полная, а удаление любой функции их этой системы делает ее неполной.

Теорема. Каждый базис функционально полной системы содержит не более 4 булевых функций.

▸ Для доказательства рассмотрим четыре случая:

1) Система не содержит функций const 0 и const 1. Но по сильной теореме Поста в ней должна быть функция f, не сохраняющая 0. Так как это не может быть const 1, то эта функция является также немонотонной. Поэтому, чтобы получить базис, достаточно кроме функции f включить в базис системы одну несамодвойственную, одну нелинейную и одну не сохраняющую 1 функции. А, следовательно, базис функционально полной системы будет содержать не более 4 функций.

2), 3) Система содержит одну из функций const 0 или const 1. Достаточно отметить, что функции const 0 и const 1 обе являются несамодвойственными. Далее доказательство аналогично случаю 1.

4) Система содержит обе функции const 0 и const 1. Доказательством в этом случае служит слабая теорема Поста. ◂

Задачи

1. Построить таблицу истинности заданной функции. Найти ее СДНФ и СКНФ:

1) $(z\oplus yx)\Leftrightarrow yz\vee z/x$,
2) $z/x\Rightarrow(xy\vee z(x\oplus yz))\Leftrightarrow xz$.

2. Путем преобразований получить тупиковую ДНФ данной функции:
   1) $(z\oplus yx)\Leftrightarrow yz\vee z/x$,
   2) $z/x\Rightarrow(xy\vee z(x\oplus yz))\Leftrightarrow xz$.
3. Минимизировать заданную функцию методом Квайна:
   1) $(z\oplus yx)\Leftrightarrow yz\vee z/x$,
   2) $z/x\Rightarrow(xy\vee z(x\oplus yz))\Leftrightarrow xz$,
   3) $\neg x\neg y\neg z\neg p\vee\neg x\neg y\neg zp\vee\neg xy\neg zp\vee\neg xyzp\vee xyzp$.
4. Минимизировать заданную функцию методом Блейка:
   1) $\neg x\neg z\vee\neg x\neg y\vee\neg y\neg z\vee zx$,
   2) $\neg x\neg y\neg z\vee\neg x\neg yz\vee x\neg yz\vee xyz$,
   3) $xy\vee\neg xz\vee\neg yz$,
   4) $\neg x\neg y\vee x\neg zp\vee y\neg zp$,
   5) $\neg x\neg yz\vee x\neg yp\vee zp$,
   6) $xy\vee\neg xz\vee x\neg yzp\vee\neg xyzp$.
5. Минимизировать заданную функцию с помощью карт Карнафа:
   1) $f(x,y,z)$=(0101 0010),
   2) $f(x,y,z)$=(1110 1101),
   3) $f(x,y,z)$=(1111 1000),
   4) $f(x,y,z)$=(0111 1110),
   5) $f(x,y,z,p)$=(1100 0101 0000 0001).
   6) $f(x,y,z,p)$=(1111 1000 0100 1100),
   7) $f(x,y,z,p)$=(0000 0011 1111 1101),
   8) $f(x,y,z,p)$=(0001 1011 1101 1011),
   9) $f(x,y,z,p)$=(1101 0111 1110 1011).
6. Определить, каким классам Поста принадлежит заданная функция
   1) $(x\to y)(y\downarrow z)$,
   2) $((x\to y)\vee\neg z)/x$,
   3) $(x\to y)(y\to x)\sim z$.
7. Решить задачу 6 для всех функций двух переменных. Результат представить в виде таблицы.
8. Проверить полноту заданной системы функций. Для функционально полной системы выделить базис.
   1) F=$\{f_1, f_2\}$, где $f_1=x\to y$, $f_2=x\to\neg yz$,
   2) F=$\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, где $f_1=x\neg y$, $f_2=x\sim yz$, $f_3=0$, $f_4=1$,
   3) F=$\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, где $f_1=(x\to y)\downarrow(y\sim z)$, $f_2=(x/(xy))\Rightarrow z$, $f_3=x\oplus y$, $f_4=0$,
   4) F=$\{f_1, f_2, f_3\}$, где f_1=(0110 1001), f_2=(1000 1101), f_3=(0001 1100),
   5) F=$\{f_1, f_2, f_3\}$, где f_1=(0100 0100), f_2=(1111 1100), f_3=(1000 0000).
9. Составить все возможные базисы из функций двух переменных.
10. Для заданной функции $f(x,y,z,p)$:
    1) построить таблицу истинности;
    2) построить изображение на кубе;
    3) найти СДНФ и СКНФ;
    4) путем преобразований получить тупиковую ДНФ;
    5) найти все минимальные формы методом Квайна и построить для них таблицу истинности;
    6) найти все минимальные формы методом Блейка, выбрав в качестве исходной любую ДНФ этой функции, отличную от СДНФ;
    7) найти минимальную форму методом карт Карнафа;
    8) определить принадлежность классам Поста;

9) построить функционально полную систему функций так, чтобы эта система была базисом и содержала $f(x,y,z,p)$.

1) $f(x,y,z,p)=x\Leftarrow p/z\vee\neg y\wedge x\downarrow p\oplus z\Leftrightarrow x\rightarrow y\vee z$,
2) $f(x,y,z,p)=p\rightarrow y\Rightarrow y\wedge x\Leftrightarrow z\vee p/y\downarrow\neg z\Leftarrow x$,
3) $f(x,y,z,p)=p/z\vee x\downarrow y\oplus z\Rightarrow y\leftarrow p\vee\neg x\wedge y\Leftrightarrow z$,
4) $f(x,y,z,p)=y\Leftarrow z\downarrow p\vee x\oplus z\wedge p\rightarrow y/\neg y\Leftrightarrow z$,
5) $f(x,y,z,p)=z\rightarrow y\vee p\Leftrightarrow x\wedge\neg z\Leftarrow p/z\oplus y\downarrow x$,
6) $f(x,y,z,p)=x\downarrow y\Leftrightarrow p\vee x\Rightarrow z\wedge x/y\leftarrow\neg z\oplus x\vee z$,
7) $f(x,y,z,p)=z\oplus y\vee x\downarrow z\wedge p\Rightarrow x\leftarrow z/y\Leftrightarrow\neg p$,
8) $f(x,y,z,p)=y\downarrow z\Leftrightarrow p\Rightarrow x\vee z\wedge p\leftarrow y/\neg p\oplus z$,
9) $f(x,y,z,p)=p\downarrow x\oplus z\Leftrightarrow\neg y\vee p\wedge z\rightarrow y/z\Leftarrow x$,
10) $f(x,y,z,p)=x/y\oplus z\vee p\Leftrightarrow x\wedge y\Leftarrow\neg z\downarrow p\rightarrow y\vee z$,
11) $f(x,y,z,p)=z\Leftarrow p\downarrow y\oplus z\wedge x\rightarrow p\vee y\Leftrightarrow z/\neg x$,
12) $f(x,y,z,p)=\neg x/z\oplus p\Leftrightarrow y\wedge x\Rightarrow z\vee p\leftarrow z\downarrow p$,
13) $f(x,y,z,p)=x\oplus y\vee z\leftarrow\neg p\Leftrightarrow x/y\downarrow z\Rightarrow p\wedge z$,
14) $f(x,y,z,p)=p/z\oplus y\downarrow x\wedge p\Leftrightarrow\neg z\rightarrow y\Leftarrow z\vee x$,
15) $f(x,y,z,p)=y\downarrow z\Rightarrow p\Leftrightarrow\neg x\vee y/z\leftarrow p\downarrow x\wedge y$,
16) $f(x,y,z,p)=z/x\Rightarrow\neg(y\vee p\wedge(x\oplus y\leftarrow z))\Leftrightarrow x\downarrow p$,
17) $f(x,y,z,p)=x\vee y\oplus z\downarrow p\wedge x\Leftrightarrow y\vee x/z\Rightarrow\neg y\leftarrow p$,
18) $f(x,y,z,p)=x/z\downarrow p\oplus x\wedge p\Leftrightarrow x\Leftarrow\neg z\vee p\rightarrow y$,
19) $f(x,y,z,p)=x\downarrow z\Rightarrow y\oplus\neg p\Leftrightarrow x\vee y\wedge z\leftarrow p/x\vee z$,
20) $f(x,y,z,p)=y/p\rightarrow x\wedge y\oplus\neg p\Leftrightarrow z\downarrow x\Leftarrow z\vee x$,
21) $f(x,y,z,p)=p\vee\neg y\rightarrow x\oplus z\downarrow p\Leftrightarrow y/z\wedge x\Leftarrow p$,
22) $f(x,y,z,p)=p\Rightarrow z\vee\neg(y\oplus x\wedge z)\Leftrightarrow p/x\leftarrow z\downarrow y\wedge x$,
23) $f(x,y,z,p)=x\downarrow y\rightarrow z\oplus x\Rightarrow\neg(y\vee z)\wedge y\Leftrightarrow p/x$,
24) $f(x,y,z,p)=z/x\downarrow p\vee y\oplus x\Leftrightarrow y\Rightarrow z\wedge\neg x\leftarrow p$,
25) $f(x,y,z,p)=y\downarrow x\Leftarrow z\vee\neg p\Leftrightarrow y\rightarrow x\wedge y\oplus z/x$,
26) $f(x,y,z,p)=z\leftarrow y\oplus x/y\Leftrightarrow z\downarrow x\vee y\Rightarrow\neg z\wedge p$,
27) $f(x,y,z,p)=x\leftarrow\neg y\Rightarrow z\downarrow x\vee p\Leftrightarrow y/z\oplus x\wedge y$,
28) $f(x,y,z,p)=x\Rightarrow y\oplus z\Leftrightarrow p\downarrow x\vee y/x\wedge\neg z\leftarrow y$,
29) $f(x,y,z,p)=p\leftarrow x\wedge y/z\oplus p\Leftrightarrow y\downarrow x\vee z\Rightarrow\neg y\wedge p$,
30) $f(x,y,z,p)=x\Leftrightarrow\neg z\oplus p/z\Leftarrow x\downarrow y\vee z\wedge p\rightarrow p\oplus y$,
31) $f(x,y,z,p)=z\downarrow p\wedge\neg x\oplus p\rightarrow y\Leftrightarrow x/z\vee y\Leftarrow z$,
32) $f(x,y,z,p)=x\oplus y\wedge z\Leftrightarrow x/y\Leftarrow z\vee p\rightarrow z\downarrow\neg x$,
33) $f(x,y,z,p)=x\oplus z\Leftrightarrow\neg p/y\Leftarrow z\downarrow y\vee z\wedge p\rightarrow x$,

34) $f(x,y,z,p)=z\Leftrightarrow\neg p\downarrow z/y\oplus x/z\wedge p\rightarrow y\Leftarrow x$,
35) $f(x,y,z,p)=p\Leftarrow y\downarrow z\vee p\oplus y/\neg x\Leftrightarrow y\wedge p\rightarrow y$,
36) $f(x,y,z,p)=p/y\vee z\Leftarrow p\downarrow x\rightarrow z\Leftrightarrow y\vee x\oplus\neg z\wedge y$,
37) $f(x,y,z,p)=z\downarrow\neg p/x\leftarrow z\Leftrightarrow y\wedge p\vee y\Rightarrow x\oplus z$,
38) $f(x,y,z,p)=y\rightarrow x/z\Leftarrow\neg p\oplus x\downarrow y\Leftrightarrow z\vee x\wedge p$,
39) $f(x,y,z,p)=p\oplus x\rightarrow z/p\downarrow x\vee y\Leftrightarrow\neg z\Leftarrow p\wedge y$,
40) $f(x,y,z,p)=p\downarrow z\vee x\oplus y\rightarrow\neg y/p\Leftrightarrow z\Leftarrow x\wedge p$,
41) $f(x,y,z,p)=x\vee y\oplus z\downarrow p\wedge z\Leftrightarrow\neg x/y\leftarrow p\Rightarrow z$,
42) $f(x,y,z,p)=z\downarrow y\oplus p\Leftarrow z\wedge y\Leftrightarrow\neg p/x\oplus y\rightarrow z$,
43) $f(x,y,z,p)=y\Rightarrow p\oplus x\downarrow z\leftarrow p\Leftrightarrow y/\neg p\wedge x\vee z$,
44) $f(x,y,z,p)=p\downarrow x\wedge z\Leftrightarrow y\Leftarrow p/\neg z\oplus y\vee x\rightarrow y$,
45) $f(x,y,z,p)=x/p\Leftrightarrow y\Leftarrow x\vee\neg p\wedge z\downarrow y\oplus z\rightarrow y$,
46) $f(x,y,z,p)=\neg p\downarrow z\Leftrightarrow x\oplus y\wedge(z\vee p\leftarrow x)/y\Rightarrow p$,
47) $f(x,y,z,p)=z\downarrow x\Leftarrow y/x\vee p\Leftrightarrow\neg x\oplus z\wedge p\rightarrow x$,
48) $f(x,y,z,p)=p\rightarrow x\oplus\neg y\wedge z/p\Leftrightarrow p\downarrow x\vee z\Leftarrow y$,
49) $f(x,y,z,p)=z/p\leftarrow x\vee p\Leftrightarrow y\oplus x\downarrow p\wedge y\Rightarrow\neg z$,
50) $f(x,y,z,p)=p\Rightarrow\neg x\oplus z\vee y\downarrow p\leftarrow z/x\Leftrightarrow z\wedge y$,
51) $f(x,y,z,p)=x\leftarrow\neg p\vee z\oplus y\downarrow z\Leftrightarrow p/x\wedge z\Rightarrow x$,
52) $f(x,y,z,p)=x\downarrow z\oplus\neg p/y\rightarrow z\Leftrightarrow p\vee y\Leftarrow x\wedge z$,
53) $f(x,y,z,p)=\neg x\Leftarrow z\downarrow p\oplus\neg y/x\Leftrightarrow p\vee x\rightarrow y\wedge z$,
54) $f(x,y,z,p)=y\wedge p\oplus x/z\downarrow y\Leftarrow p\vee x\rightarrow z\Leftrightarrow\neg x$,
55) $f(x,y,z,p)=p\leftarrow x\vee y/z\oplus p\downarrow x\Leftrightarrow\neg z\wedge y\Rightarrow z$,
56) $f(x,y,z,p)=x\leftarrow y\downarrow z\Leftrightarrow\neg p\vee z\Rightarrow y/z\wedge p\oplus x$,
57) $f(x,y,z,p)=y/z\wedge x\oplus p\downarrow x\vee z\Leftrightarrow y\rightarrow\neg z\Leftarrow p$,
58) $f(x,y,z,p)=x\Leftarrow y\oplus z\wedge x\Leftrightarrow y\downarrow p\vee z\rightarrow\neg y/x$,
59) $f(x,y,z,p)=z\downarrow p\oplus x\vee(p\leftarrow z)/z\wedge y\Rightarrow p\Leftrightarrow\neg x$,
60) $f(x,y,z,p)=p/x\oplus z\rightarrow y\wedge x\downarrow p\Leftrightarrow\neg z\Leftarrow y\vee x$,
61) $f(x,y,z,p)=\neg x\downarrow y\rightarrow z\wedge p\Leftrightarrow x\vee y\oplus z/p\Leftarrow x$,
62) $f(x,y,z,p)=z\oplus p\Rightarrow x\Leftrightarrow y\vee z\downarrow p\leftarrow x\wedge y/\neg x$,
63) $f(x,y,z,p)=\neg p\rightarrow x\Leftrightarrow z\Leftarrow y/p\vee x\downarrow y\oplus p\wedge x$,
64) $f(x,y,z,p)=y\Rightarrow x\Leftrightarrow\neg z\oplus p/y\leftarrow x\wedge p\downarrow z$,
65) $f(x,y,z,p)=y\downarrow x\oplus y\vee p\Leftrightarrow z/x\rightarrow\neg y\wedge x\Leftarrow z$,
66) $f(x,y,z,p)=x\vee y\oplus z\Rightarrow\neg p\Leftrightarrow x\wedge z\leftarrow y\downarrow p/x$,
67) $f(x,y,z,p)=z/y\Leftarrow p\Leftrightarrow x\wedge y\vee\neg z\rightarrow x\oplus p\downarrow y$,
68) $f(x,y,z,p)=y\downarrow x\rightarrow p\vee\neg z\Leftrightarrow x\wedge y/z\oplus p\Leftarrow z$,

69) $f(x,y,z,p)=p\vee x\wedge z\oplus y\Leftrightarrow\neg x\leftarrow z/p\Rightarrow y\downarrow x$,
70) $f(x,y,z,p)=x\oplus y\leftarrow z\Leftrightarrow p/x\wedge\neg y\Rightarrow z\downarrow p\vee x$,
71) $f(x,y,z,p)=y\downarrow p\Leftrightarrow x\wedge y\Leftarrow\neg z\vee p/x\rightarrow y\oplus z$,
72) $f(x,y,z,p)=x\wedge y\oplus p\downarrow\neg z\Rightarrow x/y\vee z\Leftrightarrow p\leftarrow x$,
73) $f(x,y,z,p)=y\leftarrow x\Leftrightarrow z\Rightarrow p/\neg x\oplus y\vee z\downarrow p\wedge x$,
74) $f(x,y,z,p)=p\rightarrow y\oplus z\Leftrightarrow x\wedge y/\neg z\vee p\downarrow x\Leftarrow y$,
75) $f(x,y,z,p)=x\oplus y\wedge z/p\Leftarrow x\Leftrightarrow\neg z\rightarrow y\vee p\downarrow x$,
76) $f(x,y,z,p)=z\oplus p\Rightarrow y\wedge p\Leftrightarrow x/z\vee p\downarrow\neg y\leftarrow x$,
77) $f(x,y,z,p)=x\downarrow\neg y\Rightarrow z\Leftrightarrow p/x\vee z\oplus y\leftarrow p\wedge x$,
78) $f(x,y,z,p)=y\vee p\wedge\neg z\leftarrow x\Rightarrow y\Leftrightarrow p/x\downarrow y\oplus z$,
79) $f(x,y,z,p)=x/y\vee z\wedge p\Leftrightarrow x\rightarrow z\Leftarrow p\downarrow y\oplus\neg z$,
80) $f(x,y,z,p)=p\vee z\oplus y\Leftrightarrow x\rightarrow y\downarrow z\Leftarrow p\wedge x/\neg y$,
81) $f(x,y,z,p)=x\downarrow y\vee z\Leftrightarrow p\oplus\neg x\Rightarrow y\wedge x\leftarrow z/p$,
82) $f(x,y,z,p)=y\rightarrow p\Leftrightarrow z\wedge x\oplus\neg y\Leftarrow z/p\vee y\downarrow x$,
83) $f(x,y,z,p)=\neg p\oplus z/x\Leftrightarrow y\rightarrow z\wedge p\Leftarrow x\downarrow y\vee p$,
84) $f(x,y,z,p)=p\Leftarrow\neg z\rightarrow y\Leftrightarrow x\downarrow y\oplus z/p\vee x\wedge z$,
85) $f(x,y,z,p)=\neg x\vee z\oplus p\Leftrightarrow p\leftarrow y\downarrow z/p\Rightarrow z\wedge y$,
86) $f(x,y,z,p)=p\wedge x\vee z/y\Leftrightarrow x\rightarrow p\Leftarrow\neg z\downarrow y\oplus p$,
87) $f(x,y,z,p)=z\oplus x\downarrow y\Rightarrow\neg p\Leftrightarrow x\leftarrow z/x\wedge y\vee z$,
88) $f(x,y,z,p)=x/p\oplus y\leftarrow z\downarrow x\Leftrightarrow y\vee z\Rightarrow p\wedge\neg x$,
89) $f(x,y,z,p)=y\downarrow p/x\Leftrightarrow x\rightarrow z\oplus p\wedge y\vee p\Leftarrow\neg z$,
90) $f(x,y,z,p)=z\wedge\neg y\rightarrow x/p\Leftrightarrow z\vee p\downarrow x\Leftarrow y\oplus z$,
91) $f(x,y,z,p)=p\vee\neg y\wedge z\Leftrightarrow x\Leftarrow z/p\rightarrow y\downarrow x\oplus y$,
92) $f(x,y,z,p)=x\wedge y\downarrow z/p\Leftrightarrow x\rightarrow y\oplus z\Leftarrow p\vee\neg x$,
93) $f(x,y,z,p)=z\rightarrow p\wedge x\Leftarrow y\Leftrightarrow x/z\downarrow y\oplus\neg p\vee x$,
94) $f(x,y,z,p)=y\Rightarrow p\wedge x/z\vee\neg y\Leftrightarrow x\Leftarrow y\oplus p\vee z$,
95) $f(x,y,z,p)=x\wedge y\oplus p\Leftarrow\neg z\Leftrightarrow x\downarrow y\vee z/p\rightarrow y$,
96) $f(x,y,z,p)=\neg z\rightarrow p\vee x\Leftarrow y\Leftrightarrow x/y\wedge z\downarrow p\oplus z$,
97) $f(x,y,z,p)=x\rightarrow y\downarrow p\Leftarrow z\wedge y\oplus\neg x/y\Leftrightarrow p\vee z$,
98) $f(x,y,z,p)=z\vee p\leftarrow\neg y\Leftrightarrow z/y\downarrow x\Rightarrow y\oplus p\wedge z$,
99) $f(x,y,z,p)=x\Leftarrow y\downarrow z\Leftrightarrow\neg p\rightarrow x/y\oplus x\wedge z\vee p$,
100) $f(x,y,z,p)=z\vee p\oplus y\Leftrightarrow z\leftarrow p\downarrow x\Rightarrow y/z\wedge\neg x$,
101) $f(x,y,z,p)=x\leftarrow p/z\vee\neg y\wedge x\downarrow p\Leftrightarrow z\vee x\oplus y\Rightarrow z$,
102) $f(x,y,z,p)=p\rightarrow y\Rightarrow y/x\Leftrightarrow z\vee p\wedge\neg y\downarrow z$,
103) $f(x,y,z,p)=p/z\leftarrow x\downarrow y\Rightarrow y\oplus p\Leftrightarrow\neg(x\wedge y\vee z)$,

104) $f(x,y,z,p)=y\Leftarrow z\oplus p\vee x\wedge z\downarrow p\rightarrow y/\neg y\Leftrightarrow z$,
105) $f(x,y,z,p)=\neg z\rightarrow y\oplus p\Leftrightarrow x\wedge z\Leftarrow p\vee z\downarrow y/x$,
106) $f(x,y,z,p)=x/y\Leftrightarrow p\vee x\Rightarrow z\wedge x\downarrow y\leftarrow\neg z\oplus x\vee z$,
107) $f(x,y,z,p)=z\wedge y\vee x\downarrow z\oplus p\Rightarrow x\leftarrow z/y\Leftrightarrow\neg p$,
108) $f(x,y,z,p)=y\downarrow z\leftarrow p\Rightarrow x\vee z\Leftrightarrow p\wedge y/\neg p\oplus z$,
109) $f(x,y,z,p)=p\downarrow x/z\Leftrightarrow y\oplus p\wedge z\rightarrow y\vee z\Leftarrow\neg x$,
110) $f(x,y,z,p)=x/y\vee z\oplus p\Leftrightarrow x\wedge y\Leftarrow\neg z\downarrow p\rightarrow y\vee z$,
111) $f(x,y,z,p)=z\Leftarrow p\downarrow y\oplus z\vee x\rightarrow p\wedge y\Leftrightarrow z/\neg x$,
112) $f(x,y,z,p)=\neg x/z\oplus p\Leftrightarrow y\wedge x\Rightarrow z\downarrow p\leftarrow y\vee p$,
113) $f(x,y,z,p)=x\oplus y\vee x\leftarrow\neg p\Leftrightarrow x/y\downarrow z\Rightarrow p\wedge z$,
114) $f(x,y,z,p)=p/z\vee y\downarrow x\vee p\Leftrightarrow\neg z\rightarrow y\Leftarrow z\oplus x$,
115) $f(x,y,z,p)=y\downarrow z\rightarrow p\vee\neg x\Leftrightarrow x\oplus y/z\downarrow x\Leftarrow y\wedge p$,
116) $f(x,y,z,p)=z/x\Leftrightarrow\neg y\vee p\wedge x\oplus y\leftarrow z\Rightarrow x\downarrow p$,
117) $f(x,y,z,p)=x\vee y\oplus z\downarrow p/x\Leftrightarrow y\vee x\wedge z\Rightarrow\neg(y\leftarrow p)$,
118) $f(x,y,z,p)=x/z\downarrow p\vee x\wedge p\Leftrightarrow x\Leftarrow\neg z\oplus p\rightarrow y$,
119) $f(x,y,z,p)=x/z\Rightarrow y\oplus p\Leftrightarrow x\vee y\wedge\neg z\leftarrow p/x\downarrow z$,
120) $f(x,y,z,p)=y/p\rightarrow x\wedge y\vee\neg p\Leftrightarrow z\downarrow x\Leftarrow z\oplus x$,
121) $f(x,y,z,p)=\neg p\downarrow y\rightarrow z\vee p\Leftrightarrow y\oplus z/x\Leftarrow p$,
122) $f(x,y,z,p)=p\rightarrow z\oplus\neg y\vee z\Leftrightarrow p/x\Leftarrow z\downarrow y\wedge x$,
123) $f(x,y,z,p)=x\downarrow y\rightarrow z\wedge x\Leftarrow y\vee z\oplus y\Leftrightarrow\neg p/x$,
124) $f(x,y,z,p)=z/x\oplus p\downarrow y\Leftrightarrow\neg x\wedge y\rightarrow z\vee x\Leftarrow p$,
125) $f(x,y,z,p)=y\downarrow x\Leftarrow z\vee p\oplus y\Leftrightarrow x\wedge y\rightarrow\neg z/x\oplus p$,
126) $f(x,y,z,p)=z\leftarrow y\Leftrightarrow x/y\oplus\neg z\downarrow x\vee y\Rightarrow z\wedge p$,
127) $f(x,y,z,p)=x\leftarrow\neg y\Rightarrow z\downarrow x\oplus p\Leftrightarrow y/z\vee x\wedge y$,
128) $f(x,y,z,p)=x\oplus y\Rightarrow z\Leftrightarrow p\downarrow x\vee y/x\wedge\neg z\leftarrow y$,
129) $f(x,y,z,p)=p\oplus x\wedge y/z\Leftarrow p\Leftrightarrow y\downarrow x\vee z\Rightarrow\neg y\wedge p$,
130) $f(x,y,z,p)=x\Leftrightarrow\neg p/z\Leftarrow x\downarrow y\vee z\wedge p\rightarrow p\oplus y$,
131) $f(x,y,z,p)=z\downarrow p\Rightarrow y\oplus\neg x\vee p\leftarrow y\Leftrightarrow x/z\wedge y\oplus z$,
132) $f(x,y,z,p)=x\vee y\wedge z\Leftarrow p\Leftrightarrow x/y\oplus z\vee p\rightarrow z\downarrow\neg x$,
133) $f(x,y,z,p)=y\rightarrow p\wedge x\downarrow z\Leftarrow p\Leftrightarrow y/\neg p\oplus x\vee z$,
134) $f(x,y,z,p)=p\downarrow x\oplus z\Leftrightarrow y\leftarrow p/\neg z\wedge y\vee x\Rightarrow y$,
135) $f(x,y,z,p)=x/p\Leftrightarrow y\Leftarrow x\oplus\neg p\wedge z\downarrow y\vee z\rightarrow y$,
136) $f(x,y,z,p)=\neg p\downarrow z\Leftrightarrow x\vee y\wedge(z\oplus p\leftarrow x)/y\Rightarrow p$,
137) $f(x,y,z,p)=z\downarrow x\Leftarrow y/x\oplus p\Leftrightarrow\neg x\vee z\wedge p\rightarrow x$,
138) $f(x,y,z,p)=p\rightarrow x\wedge\neg y\oplus z/p\Leftrightarrow p\downarrow x\vee z\Leftarrow y$,

139) $f(x,y,z,p)=z/p\leftarrow x\oplus p\Leftrightarrow y\vee x\downarrow p\wedge y\Rightarrow\neg z$,
140) $f(x,y,z,p)=p\Rightarrow\neg x\wedge z\vee y\downarrow p\leftarrow z/x\Leftrightarrow z\oplus y$,
141) $f(x,y,z,p)=x\leftarrow p\wedge z\oplus\neg y\downarrow z\Leftrightarrow p/x\vee z\Rightarrow x$,
142) $f(x,y,z,p)=x\downarrow z\vee\neg p/y\rightarrow z\Leftrightarrow p\oplus y\Leftarrow x\wedge z$,
143) $f(x,y,z,p)=\neg x\Leftarrow z\downarrow p\vee\neg y/x\Leftrightarrow p\oplus x\rightarrow y\wedge z$,
144) $f(x,y,z,p)=y\wedge p\vee x/z\downarrow y\Leftarrow p\oplus x\rightarrow z\Leftrightarrow\neg x$,
145) $f(x,y,z,p)=p\leftarrow x\oplus y/z\vee p\downarrow x\Leftrightarrow\neg z\wedge y\Rightarrow z$,
146) $f(x,y,z,p)=x\leftarrow y\downarrow z\Leftrightarrow\neg p\oplus z\Rightarrow y/z\wedge p\vee x$,
147) $f(x,y,z,p)=y/z\wedge x\vee p\downarrow x\oplus z\Leftrightarrow y\rightarrow\neg z\Leftarrow p$,
148) $f(x,y,z,p)=x\leftarrow y\oplus z\vee x\Leftrightarrow\neg y\downarrow p/z\Rightarrow y\wedge x$,
149) $f(x,y,z,p)=z\downarrow p\vee x\oplus\neg p\leftarrow z/z\wedge y\Rightarrow p\Leftrightarrow x$,
150) $f(x,y,z,p)=p/x\vee z\Rightarrow y\wedge x\downarrow p\Leftrightarrow\neg z\leftarrow y\oplus x$.

3. ФОРМАЛЬНАЯ ЛОГИКА И ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Под *высказыванием* принято понимать языковое предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно.

В логике высказываний интересуются не содержанием, а *истинностью* или *ложностью* высказываний. Истинностное значение – *истина* или *ложь* – будем обозначать И и Л соответственно.

Логические операции (связки)

Отрицанием высказывания P называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывание P ложно. Обозначается $\neg P$.

Конъюнкцией двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания. Обозначается $P\wedge Q$.

Дизъюнкцией двух высказываний P и Q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны. Обозначается $P\vee Q$.

Импликацией двух высказываний P и Q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда P истинно, а Q ложно. Обозначается $P\supset Q$.

Эквиваленцией двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения P и Q совпадают. Обозначается $P\sim Q$.

Алфавит логики высказываний содержит следующие символы: высказывательные переменные – обычно заглавные латинские буквы; логические символы $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, ~; символы скобок (,).

Последовательность символов в логике высказываний называется *формулой*, если она удовлетворяет следующему определению:

1) любая высказывательная переменная – формула;
2) если A и B – формулы, то $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \supset B$, A~B, (A) – формулы.

Если каждой высказывательной переменной, входящей в формулу, придавать истинностное значение И и Л, то формула будет определять *истинностную функцию*, т.е. функцию, определенную на множестве $\{\text{С,о}\}^n$ (n – число высказывательных переменных) со значениями в множестве {И, Л}. Если, кроме того, принять И=1, Л=0, то любую формулу логики высказываний можно интерпретировать как формулу логики переключательных функций. По аналогии с переключательными функциями, для любого высказывания можно построить таблицу истинности.

Упорядоченный набор высказывательных переменных $<X_1, X_2, ..., X_k>$ назовем *списком* переменных формулы A, если все переменные формулы A содержатся в этом наборе. В списке переменных формулы A часть переменных может быть фиктивной, т.е. может не входить явно в формулу A. Очевидно, что если список переменных для формулы A содержит k переменных, то таблица истинности для формулы A будет содержать 2^k строк.

Пусть A и B – две формулы, зависящие от одного и того же списка переменных $<X_1, X_2, ..., X_k>$. Будем называть их *равносильными* (обозначается A=B), если на любом наборе значений переменных они принимают одинаковые значения.

Отношение равносильности есть отношение эквивалентности.

В логике высказываний действуют выведенные нами ранее равносильности для переключательных функций.

Тождественно-истинные формулы. Правильные рассуждения

Пусть формула A зависит от списка переменных $<X_1, X_2, ..., X_k>$.

Формула A называется *тавтологией* (*тождественно-истинной формулой* – ТИФ), если при любых значения переменных списка $<X_1, X_2, ..., X_k>$ она принимает значение И.

Формула A называется *выполнимой* (*условно-истинной формулой* – УИФ), если при некоторой значениях переменных списка $\langle X_1, X_2, ..., X_k \rangle$ она принимает значение И.

Формула A называется *тождественно-ложной формулой* – ТЛФ, если при любых значениях переменных списка $\langle X_1, X_2, ..., X_k \rangle$ она принимает значение Л.

Формула A называется *опровержимой* (*условно-ложной формулой*), если при некоторых значениях переменных списка $\langle X_1, X_2, ..., X_k \rangle$ она принимает значение Л.

При доказательстве утверждений в математических теориях обычно используют рассуждения. На языке логики эти рассуждения можно выразить формулами.

Рассуждения называются *правильными*, если они построены по законам формальной логики и из конъюнкции посылок следует заключение, т.е. всякий раз, когда все посылки истинны, заключение тоже истинно.

Пусть $P_1, P_2, ..., P_n$ – посылки, D – заключение. Тогда для определения правильности рассуждения по схеме $\dfrac{P_1, P_2, \ldots, P_n}{D}$, т.е. утверждения о том, что из данных посылок $P_1, P_2, ..., P_n$ следует заключение D, требуется установить тождественную истинность формулы $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \supset D$.

Так как речь идет лишь о правильности рассуждения, истинность заключения не является ни необходимым, ни достаточным условием правильности рассуждения.

Наиболее распространенными схемами правильных рассуждений являются следующие схемы: $\dfrac{A \supset B, A}{B}$ и $\dfrac{A \supset B, \neg B}{\neg A}$.

Рассмотрим условное высказывание $A \supset B$, где A – конъюнкция посылок, B – заключение. Иногда удобнее вместо доказательства истинности этого условного высказывания установить логическую истинность некоторого другого высказывания, равносильного исходному. Такие формы доказательства называются *косвенными методами доказательства*.

Одним из них является способ доказательства от противного. Предположим, что утверждение $A \supset B$ ложно. Тогда, исходя их этого предположения, приходим к противоречию и доказываем, что некоторое утверждение (соответствующее высказыванию C) выполняется и не выполняется (одновременно). Применимость этой формы косвенного метода доказательства оправдывается равносильностью

$$A \supset B = \neg(A \supset B) \supset (C \wedge \neg C) = (A \wedge \neg B) \supset (C \wedge \neg C).$$

Существуют и другие схемы доказательства от противного:

$A \supset B = (A \wedge \neg B) \supset \neg A$,

$A \supset B = (A \wedge \neg B) \supset B$.

Ещё одной формой косвенного метода доказательства является доказательство по закону контрапозиции, основанное на равносильности $A \supset B = \neg B \supset \neg A$, когда вместо истинности $A \supset B$ доказывается истинность $\neg B \supset \neg A$.

3.2. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ (ИВ)

Чтобы задать формальную аксиоматическую теорию, необходимо определить:

1) некоторое счётное множество символов (алфавит) – символов теории T (конечные последовательности символов теории T называются *выражениями* теории T);
2) подмножество выражений теории T, называемых *формулами*;
3) подмножество формул теории T, называемых *аксиомами*;
4) конечное множество R_1, R_2, ..., R_m отношений между формулами, называемых *правилами вывода*.

Если A и формулы A_1, A_2, ..., A_i находятся в некотором отношении R_k, то A называется *непосредственным следствием* из формул A_1, A_2, ..., A_i, полученным по правилу R_k.

Выводом в теории T называется всякая последовательность $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ формул такая, что для любого i формула φ_i есть либо аксиома теории T, либо непосредственное следствие каких-либо предыдущих формул.

Формула A называется *теоремой* теории T, если в ней существует вывод, в котором последней формулой является A.

Формула A называется *следствием множества формул* Γ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность формул $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, что φ_n есть A, и для любого i, $1 \le i \le n$, φ_i есть либо аксиома, либо формула из Γ, либо непосредственное следствие некоторых предыдущих формул. Эта последовательность называется выводом A из Γ. Элементы Γ называются *посылками* вывода или *гипотезами*. Сокращенно можно записать $\Gamma \vdash A$. Если множество Γ состоит их формул B_1, B_2, ..., B_k, то пишут $B_1, B_2, ..., B_k \vdash A$, и говорят, что формула A *выводима* из формул B_1, B_2, ..., B_k. Если Γ – пустое множество, то $\Gamma \vdash A$ тогда и только тогда, когда A есть теорема. В этом случае принято писать $\vdash A$ и говорить, что формула A доказуема, а сам вывод (последовательность формул) называют *доказательством*.

Формальная аксиоматическая теория называется *полной*, если в ней доказуема любая тавтология.

Формальная аксиоматическая теория называется *непротиворечивой*, если в ней не существует вывода формулы A такой, что одновременно доказуемы формулы A и $\neg A$.

Формальную аксиоматическую теорию называют *полной в узком смысле*, если добавление любой невыводимой формулы в качестве схемы аксиом приводит к противоречивой системе.

Одним из важных примеров аксиоматической теории может служить исчисление высказываний (один из возможных способов формализации логики высказываний). Определим эту формальную аксиоматическую теорию следующим образом:

1. Алфавит ИВ образуют буквы A, B, C... и т.д. (возможно с индексами), которые называются *пропозициональными переменными*, логические символы (связки) $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, а также вспомогательные символы скобок (,).

2. Множество формул ИВ определяется индуктивно:

а) все пропозициональные переменные являются формулами ИВ;

б) если A и B формулы ИВ, то $(\neg A)$, $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\supset B)$ – формулы ИВ;

в) выражение является формулой ИВ тогда и только тогда, когда это может быть установлено с помощью пунктов а) и б).

Договоримся далее опускать внешние скобки у формулы

3. Аксиомы ИВ (система Клини).

1) $A\supset(B\supset A)$

2) $(A\supset B)\supset((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C))$

3) $A\supset(B\supset A\wedge B)$

4) $A\wedge B\supset A$ 5) $A\wedge B\supset B$

6) $A\supset A\vee B$ 7) $B\supset A\vee B$

8) $(A\supset C)\supset((B\supset C)\supset(A\vee B\supset C))$

9) $(A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)$

10) $\neg\neg A\supset A$

4. Единственным **правилом вывода** в ИВ является *привило заключения* (*modus ponens*): если A и $A\supset B$ – выводимые формулы, то B – также выводимая формула. Символическая запись: $\dfrac{A, A\supset B}{B}$.

Выводом A_1, A_2,..., $A_n \vdash A$ называется последовательность формул φ_1, φ_2,..., φ_m, A, в которой любая формула либо является одной из формул A_1, A_2,..., A_n (т.е. *посылкой*), либо *аксиомой*, либо *подстановкой в аксиому*, либо получается из предыдущих формул по правилу вывода.

Исчисление высказываний - непротиворечивая, полная аксиоматическая теория, причем ИВ полно и в узком смысле.

Примеры выводов и доказательств.

I. Построить вывод $D \vdash C \vee D$

1) D посылка,
2) $D \supset C \vee D$ аксиома 7, $A \to C$, $B \to D$,
3) $C \vee D$ *т.р.* 1 и 2.

II. Доказать $\vdash D \supset D$

1) $D \supset (D \supset D)$ акс. 1, $A \to D$, $B \to D$,
2) $(D \supset (D \supset D)) \supset ((D \supset ((D \supset D) \supset D)) \supset (D \supset D))$ акс. 2, $A \to D$, $B \to D \supset D$, $C \to D$,
3) $(D \supset ((D \supset D) \supset D)) \supset (D \supset D)$ *т.р.* 1 и 2,
4) $D \supset ((D \supset D) \supset D)$ акс. 1, $A \to D$, $B \to D \supset D$,
5) $D \supset D$ *т.р.* 4 и 3.

Теорема о дедукции. Если имеется вывод формулы B из последовательности формул Г, A, то можно построить вывод формулы $A \supset B$ из последовательности формул Г (символически: Если Г, $A \vdash B$, то Г $\vdash A \supset B$), где Г – набор некоторых формул A_1, A_2,..., A_n.

‣ Докажем эту теорему конструктивно, т.е. предложим алгоритм построения вывода Г $\vdash A \supset B$ из имеющегося вывода Г, $A \vdash B$.

Пусть имеется последовательность формул φ_1, φ_2,..., φ_m, B, является выводом Г, $A \vdash B$. Далее будем называть этот вывод *вспомогательным*. На первом шаге нахождения результирующего вывода припишем спереди к каждой из формул вспомогательного вывода символы $A \supset$, добавляя, если это необходимо, скобки. Получим последовательность $A \supset \varphi_1$, $A \supset \varphi_2$,..., $A \supset \varphi_m$, $A \supset B$ с последней формулой $A \supset B$, которая и должна быть последней в результирующем выводе. Очевидно, эта последовательность может не являться выводом из A_1, A_2,..., A_n. Однако можно перед каждой формулой $A \supset \varphi_i$, $i = \overline{1,m}$ вставить дополнительные формулы так, чтобы превратить ее в вывод из A_1, A_2,..., A_n. Выбор дополнительных формул при каждом i зависит от того, чем оправдывается наличие формулы φ_i во вспомогательном выводе. Возможны следующие случаи:

1) φ_i – аксиома или подстановка в аксиому;
2) φ_i – одна из посылок $A_1, A_2, \ldots, A_n$;
3) $\varphi_i = A$;
4) φ_i – *modus ponens* φ_x и φ_y, где $x<i$, $y<i$, причем $\varphi_y = \varphi_x \supset \varphi_i$.

Рассмотрим для каждого из четырех случаев, на какую последовательность формул нужно заменить φ_i.

Случаи 1 и 2

1) φ_i ,
2) $\varphi_i \supset (A \supset \varphi_i)$ акс. 1 $A \to \varphi_i$, $B \to A$,
3) $A \supset \varphi_i$ *т.р.* 1 и 2.

Случай 3

1) $A \supset (A \supset A)$ акс. 1, $B \to A$,
2) $(A \supset (A \supset A)) \supset ((A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset (A \supset A))$ акс. 2, $B \to A \supset A$, $C \to A$,
3) $(A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset (A \supset A)$ *т.р.* 1 и 2,
4) $A \supset ((A \supset A) \supset A)$ акс. 1, $B \to A \supset A$,
5) $A \supset A$ *т.р.* 4 и 3.

Случай 4

Пусть φ_i – modus ponens φ_x и φ_y, где $x<i$, $y<i$, причем $\varphi_y = \varphi_x \supset \varphi_i$. Пусть также в результирующем выводе формула $A \supset \varphi_x$ имеет номер p, а формула $A \supset (\varphi_x \supset \varphi_i)$ имеет номер q.

1) $(A \supset \varphi_x) \supset ((A \supset (\varphi_x \supset \varphi_i)) \supset (A \supset \varphi_i))$ акс.2, $A \to A$, $B \to \varphi_x$, $C \to \varphi_i$,
2) $(A \supset (\varphi_x \supset \varphi_i)) \supset (A \supset \varphi_i)$ *т.р.* p и 1,
3) $A \supset \varphi_i$ *т.р.* q и 2. ◂

Следствие. $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A$ тогда и только тогда, когда $\vdash (A_1 \supset (A_2 \supset \ldots (A_{n-1} \supset (A_n \supset A)) \ldots))$.

Пример. Построить вывод $A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A$. Рассмотрим на этом примере алгоритм, приведенный в доказательстве теоремы о дедукции.

Строим таблицу истинности для формулы $((A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A))$.

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \supset \neg A$	$A \supset B$	$((A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Мы выяснили, что формула $((A\supset B)\supset(\neg B\supset\neg A))$ ТИФ, значит, вывод $A\supset B \vdash \neg B\supset\neg A$ существует (по следствию из теоремы о дедукции).

Построим вспомогательный вывод $A\supset B, \neg B \vdash \neg A$.

Вспомогательный вывод	Основной вывод
1'. $A\supset B$ посылка	1. $A\supset B$ посылка 2. $(A\supset B)\supset(\neg B\supset(A\supset B))$ акс. 1 $A\to A\supset B$, $B\to\neg B$ 3(1'). $\neg B\supset(A\supset B)$ *т.р.* 1, 2
2'. $(A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)$ акс. 9	4. $(A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)$ акс. 9 5. $(A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)\supset(\neg B\supset((A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A))$ акс. 1 $A\to(A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)$, $B\to\neg B$ 6(2'). $\neg B\supset((A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A))$ *т.р.* 4, 5
3'. $((A\supset\neg B)\supset\neg A)$ *т.р.* 1' и 2'	7. $\mathbf{(}\neg B\supset(A\supset B)\mathbf{)\supset((}\neg B\supset\mathbf{(}(A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)\mathbf{))\supset}$ $\mathbf{\supset(}\neg B\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)\mathbf{))}$ акс. 2 $A\to\neg B$, $B\to(A\supset B)$, $C\to((A\supset\neg B)\supset\neg A)$ 8. $\mathbf{(}\neg B\supset\mathbf{(}(A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)\mathbf{))\supset(}\neg B\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)\mathbf{)}$ *т.р.* 3, 7 9(3'). $\neg B\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)$ *т.р.* 6, 8
4'. $\neg B$ посылка	10. $\neg B\supset(\neg B\supset\neg B)$ акс. 1, $B\to\neg B$ 11. $(\neg B\supset(\neg B\supset\neg B))\supset((\neg B\supset((\neg B\supset\neg B)\supset\neg B))\supset(\neg B\supset\neg B))$ акс. 2, $B\to\neg B\supset\neg B$, $C\to\neg B$ 12. $\neg B\supset((\neg B\supset\neg B)\supset\neg B)$ акс. 1, $B\to\neg B$ 13. $(\neg B\supset((\neg B\supset\neg B)\supset\neg B))\supset(\neg B\supset\neg B)$ *т.р.* 10, 11 14(4'). $\neg B\supset\neg B$ *т.р.* 12, 13
5'. $\neg B\supset(A\supset\neg B)$ акс.1 $A\to\neg B$, $B\to A$	15. $\neg B\supset(A\supset\neg B)$ акс.1, $A\to\neg B$, $B\to A$ 16. $(\neg B\supset(A\supset\neg B))\supset(\neg B\supset(\neg B\supset(A\supset\neg B)))$ акс. 1 $A\to(\neg B\supset(A\supset\neg B))$, $B\to\neg B$ 17(5'). $(\neg B\supset(\neg B\supset(A\supset\neg B))$ *т.р.* 15, 16
6'. $(A\supset\neg B)$ *т.р.* 4' и 5'	18. $\mathbf{(}\neg B\supset\neg B\mathbf{)\supset((}\neg B\supset(\neg B\supset(A\supset\neg B)\mathbf{))\supset(}\neg B\supset(A\supset\neg B)\mathbf{))}$ акс. 2. $A\to\neg B$, $B\to\neg B$, $C\to(A\supset\neg B)$ 19. $\mathbf{(}\neg B\supset(\neg B\supset(A\supset\neg B)\mathbf{))\supset(}\neg B\supset(A\supset\neg B)\mathbf{)}$ *т.р.* 14, 18 20(6'). $\neg B\supset(A\supset\neg B)$ *т.р.* 17, 19
7'. $\neg A$ *т.р.* 3' и 6'	21. $\mathbf{(}\neg B\supset(A\supset\neg B)\mathbf{)\supset((}\neg B\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)\mathbf{)\supset(}\neg B\supset\neg A\mathbf{))}$ акс. 2. $A\to\neg B$, $B\to(A\supset\neg B)$, $C\to\neg A$ 22. $\mathbf{(}\neg B\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)\mathbf{)\supset(}\neg B\supset\neg A\mathbf{)}$ *т.р.* 20, 21 23(7'). $\neg B\supset\neg A$ *т.р.* 9, 22

Отметим, что алгоритм, приведенный в доказательстве теоремы о дедукции, дает лишь способ получения из вспомогательного вывода $\Gamma, A \vdash B$ вывода $\Gamma \vdash A\supset B$, но не гарантирует оптимальности результирующего вывода. Очень часто полученный вывод можно сократить.

Оптимальный вывод (получен сокращением основного вывода):

1''. $A\supset B$ посылка,

2''. $(A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)$ акс. 9,

3''. $(A\supset\neg B)\supset\neg A$ *т.р.* 1'' и 2'',

4''. $((A\supset\neg B)\supset\neg A)\supset(\neg B\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A))$ акс.1 $A\to(A\supset\neg B)\supset\neg A)$, $B\to\neg B$,

5''. $\neg B\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)$ *т.р.* 3'' и 4'',

6''. $\neg B\supset(A\supset\neg B)$ акс.1 $A\to\neg B$, $B\to A$,

7''. $\mathbf{(}\neg B\supset(A\supset\neg B)\mathbf{)}\supset\mathbf{((}\neg B\supset\mathbf{(}(A\supset\neg B)\supset\neg A\mathbf{))}\supset\mathbf{(}\neg B\supset\neg A\mathbf{))}$ акс. 2 $A\to\neg B$, $B\to(A\supset\neg B)$, $C\to\neg A$,

8''. $\mathbf{(}\neg B\supset\mathbf{(}(A\supset\neg B)\supset\neg A\mathbf{))}\supset\mathbf{(}\neg B\supset\neg A\mathbf{)}$ *т.р.* 6'' и 7'',

9''. $\neg B\supset\neg A$ *т.р.* 5'' и 8''.

3.3. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ К ЕСТЕСТВЕННОМУ ЯЗЫКУ

В случае сомнения относительно истинности того или иного словесного рассуждения его стоит перевести в символику исчисления высказываний и проверить существование соответствующего вывода.

Приведем список наиболее часто встречающихся выражений, соответствующих связкам исчисления высказываний.

$A\sim B$	*A*, если и только если *B* Если *A*, то *B*, и обратно *A*, если *B*, и *B*, если *A* Для *A* необходимо и достаточно *B* *A* равносильно *B* *A* тогда и только тогда, когда *B*
$A\supset B$	Если *A*, то *B* Коль скоро *A*, то *B* В случае *A* имеет место *B* Для *B* достаточно *A* Для *A* необходимо *B* *A*, только если *B* *B*, если *A* *A* влечет *B* *A* имплицирует *B*

$A \wedge B$	A и B Не только A, но и B B, хотя и A B, несмотря на A Как A, так и B A вместе с B A, в то время как B
$A \vee B$	A или B, или оба A или B A, если не B A и/или B (в юридических текстах)
$\neg A$	Не A (или то, что получится в результате вставки частицы "не" перед глаголом – основным или вспомогательным) A не имеет места A не верно
$A \oplus B$ $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$ $\neg(A \supset B) \vee \neg(B \supset A)$ $(\neg B \supset \neg A) \vee (\neg A \supset \neg B)$	A либо B, но не оба Или A, или B Либо A, либо B [иногда] A, если не B [иногда] A, кроме случая когда B [иногда] A или B [иногда]
$\neg(A \vee B)$	Ни A, ни B

Переводя выражения обычного языка с помощью табличных пропозициональных связок, мы лишаемся некоторых оттенков смысла, но зато выигрываем в точности.

Хотя в исчислении высказываний $A \wedge B$ равносильно $B \wedge A$, фразы «у Джейн родился ребенок, и она вышла замуж» и «Джейн вышла замуж, и у нее родился ребенок» будут пониматься знакомыми Джейн по-разному. В этом примере порядок высказываний в конъюнкции наводит на мысль о следовании во времени или о причинно-следственной связи. Следование во времени можно выразить с помощью классической логики, если пользоваться символизмом исчисления предикатов. Перевод же посредством $A \wedge B$ проще и достаточен для логического анализа, если в нем не участвует идея времени (или причинности).

Другая трудность перевода состоит в двусмысленности определенных терминов, когда их надо переводить связками. Если в меню ресторана указано: «Чай или кофе бесплатно», мы не удивимся, если, потребовав и то и другое, получим увеличенный счет. Но если объявление гласит, что книжные пожертвования принимаются в церкви или в школе, мы не думаем, что принесенное нами в церковь отвергнут только потому, что мы уже пожертвовали что-то в школу.

Если A и B таковы, что известно или неявно предполагается $\neg(A \wedge B)$, то включительное и исключительное «A или B» равносильны и естественно употреблять наиболее простой перевод, т.е $A \vee B$. Точно так же если в лекции перед математической аудиторией сказать «n – четное [A] или нечетное простое число [B]», то безразлично, что имелось в виду $A \vee B$ или $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$. Но если аудитория не знает, что число не может быть чётным и нечётным одновременно, это перестает быть безразличным.

В обычном языке мы не употребляем скобок для указания того, как нужно сочетать различные части сложной фразы, используя иногда взамен довольно тонкие средства. «Если Джонс присутствует [Д] или если Уильямс выскажется за наше предложение [У] и Старк не станет возражать [С], то наше предложение будет принято [П].» Как надо переводить? (а) $(Д \vee У) \wedge \neg С \supset П$ или так: (в) $Д \vee (У \wedge \neg С) \supset П$. В письменном языке отсутствие запятой перед «и» решит в пользу (в); в устной же речи, чтобы выразить именно (а), надо заменить «и» на «ну и конечно, если».

Как мы видим, перевод обычного языка в логические символы не является механическим делом. Переводчик прежде всего должен как следует понять переводимый текст. Если автором является он сам, он должен выбрать такую интерпретацию, какую имел в виду. Если же автором является кто-то другой, то при наличии сомнительных слов необходимо восстановить намерения автора.

Задачи

1. Переведите каждое из следующих рассуждений в логическую символику и проанализируйте результат на правильность:
   1) Я бы заплатил за работу по ремонту телевизора, только если бы он стал работать. Он же не работает. Поэтому я платить не буду.
   2) Если бы он ей не сказал, она ни за что не узнала бы. А не спроси она его, он бы и не сказал ей. Но она узнала. Значит, она его спросила.
   3) Он сказал, что придет, если не будет дождя. Но идет дождь. Значит, он не придет.
   4) Если он принадлежит к нашей компании, то он храбр и на него можно положиться. Он не принадлежит к нашей компании. Значит, он не храбр или же на него нельзя положиться.

5) Если подозреваемый совершил эту кражу, то либо она была тщательно подготовлена, либо он имел соучастника. Если бы кража была подготовлена тщательно, то, если бы был соучастник, украдено было бы гораздо больше. Значит, подозреваемый невиновен.
6) Намеченная атака удастся, только если захватить противника врасплох или же если позиции его плохо защищены. Захватить его врасплох можно только, если он беспечен. Он не будет беспечен, если его позиции плохо защищены. Значит, атака не удастся.
7) Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство имело место после полуночи. Если убийство было совершено после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Следовательно, Смит был убийцей.
8) Если $x+3=\sqrt{3-x}$ (*), то $x^2+6x+9=3-x$. Но $x^2+6x+9=3-x$ тогда и только тогда, когда $(x+6)(x+3)=0$, что имеет место в том и только в том случае, когда $x=-6$ или $x=-1$. Значит, только –6 и –1 могут быть корнями уравнения (*), т.е. $x+3=\sqrt{3-x}$ влечёт $x=-6$ или $x=-1$.
9) Если $x+3=\sqrt{3-x}$ (*), то $x^2+6x+9=3-x$. Но $x^2+6x+9=3-x$ тогда и только тогда, когда $(x+6)(x+3)=0$, что имеет место в том и только в том случае, когда $x=-6$ или $x=-1$. Значит, только –6 и –1 суть корни уравнения (*), т.е. $x=-6$ влечёт $x+3=\sqrt{3-x}$ и $x=-1$ влечёт $x+3=\sqrt{3-x}$.

2. (Задача Кислера) Браун, Джонс и Смит обвиняются в подделке сведений о подлежащих налоговому обложению доходах. Они дают под присягой такие показания:

Браун: Джонс виновен, а Смит невиновен.

Джонс: Если Браун виновен, то виновен и Смит.

Смит: Я невиновен, но хотя бы один из них двоих виновен.

Обозначим через Б, Д и С высказывания: «Браун невиновен», «Джонс невиновен», «Смит невиновен». Выразите показания каждого из обвиняемых формулой. Постройте для этих формул таблицы истинности. Затем ответьте на следующие вопросы:

1) Совместимы ли показания всех троих заподозренных (т.е. могут ли они быть верны одновременно)?
2) Показания одного из обвиняемых следуют из показаний другого; о чьих показаниях идет речь?
3) Если все трое невиновны, то кто совершил лжесвидетельство?
4) Предполагая, что показания всех обвиняемых верны, укажите, кто невиновен, а кто виновен?
5) Если невиновный говорит истину, а виновный лжет, то кто невиновен, а кто виновен?

3. Существуют ли в ИВ следующие выводы:

1) $\vdash A\wedge B\supset A\wedge C$,
2) $\vdash ((A\supset B)\supset B)\supset A$,
3) $\vdash ((A\supset B)\supset B)\supset B$,
4) $\vdash \neg(A\vee\neg A)\supset(A\vee\neg A)$,
5) $A\vdash \neg(A\supset\neg A)$,
6) $A\supset B\vdash B\supset A$,
7) $A\supset B, \neg B\vdash \neg A$?

4. Являются ли доказательством (выводом) в ИВ следующие последовательности формул:

1) $A\supset(A\vee B)$;
2) $A\supset(A\vee B)$, $(A\supset(A\vee B))\supset(B\supset(A\supset(A\vee B)))$, $B\supset(A\supset(A\vee B))$;
3) $A\supset(B\supset A)$, $(A\supset(B\supset A))\supset B$, B?

5. Выводами из каких формул являются следующие последовательности формул:

1) $A\supset(B\supset C)$, A, $B\supset C$, B, C;
2) $(A\supset\neg\neg B)\supset(\neg B\supset\neg A)$, $A\supset\neg\neg B$, $\neg B\supset\neg A$, $\neg B$, $\neg A$?

6. Построить в исчислении высказываний следующие выводы:

1) $A\vdash A$;
2) $\vdash A\supset A$;
3) $\vdash (A\vee A)\supset A$;
4) $A\supset B, B\supset C\vdash A\supset C$;
5) $A\supset B, \neg B\vdash \neg A$;
6) $A\supset B\vdash \neg B\supset\neg A$;
7) $\vdash A\supset\neg\neg A$;
8) $\vdash (\neg\neg A\supset A)\wedge(A\supset\neg\neg A)$.

7. Построить в исчислении высказываний следующие выводы:

1) $A\supset(B\supset C)\vdash B\supset(A\supset C)$,
2) $A\supset(B\supset C)\vdash (A\wedge B)\supset C$,
3) $(A\wedge B)\supset C\vdash A\supset(B\supset C)$,
4) $A\supset B\vdash (B\supset C)\supset(A\supset C)$,
5) $A\supset B\vdash (C\supset A)\supset(C\supset B)$,
6) $A\supset B\vdash (C\wedge A)\supset(C\wedge B)$,
7) $A\supset B\vdash (A\wedge C)\supset(B\wedge C)$,
8) $A\supset B\vdash (A\vee C)\supset(B\vee C)$,
9) $A\supset B\vdash (C\vee A)\supset(C\vee B)$,
10) $\neg A\vdash A\supset B$,
11) $A\vdash \neg A\supset B$,
12) $A\supset B\vdash \neg B\supset\neg A$,
13) $A\supset\neg B\vdash B\supset\neg A$,
14) $\neg A\supset B\vdash \neg B\supset A$,
15) $\neg A\supset\neg B\vdash B\supset A$,
16) $\vdash A\vee(A\wedge B)\supset A$,
17) $\vdash A\supset A\wedge(A\vee B)$,
18) $\vdash A\vee\neg A$,
19) $\vdash \neg(A\wedge\neg A)$,
20) $\vdash (A\wedge B)\wedge C\supset A\wedge(B\wedge C)$,
21) $\vdash (A\vee B)\vee C\supset A\vee(B\vee C)$,
22) $A\wedge(B\vee C)\vdash (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$,
23) $(A\wedge B)\vee(A\wedge C)\vdash A\wedge(B\vee C)$,
24) $A\vee(B\wedge C)\vdash (A\vee B)\wedge(A\vee C)$,
25) $(A\vee B)\wedge(A\vee C)\vdash A\vee(B\wedge C)$,
26) $\neg(A\vee B)\vdash \neg A\wedge\neg B$,
27) $\vdash \neg A\wedge\neg B\supset\neg(A\vee B)$,
28) $\neg(A\wedge B)\vdash \neg A\vee\neg B$,

29) $\vdash \neg A \vee \neg B \supset \neg(A \wedge B)$,
30) $A \wedge \neg B \vdash \neg(A \supset B)$,
31) $\neg(A \supset B) \vdash A \wedge \neg B$,
32) $\vdash A \vee B \supset \neg(\neg A \wedge \neg B)$,
33) $\neg(\neg A \wedge \neg B) \vdash A \vee B$,
34) $\vdash A \supset B \supset \neg(A \wedge \neg B)$,
35) $\neg(A \wedge \neg B) \vdash A \supset B$,
36) $\vdash A \wedge B \supset \neg(A \supset \neg B)$,
37) $\neg(A \supset \neg B) \vdash A \wedge B$,
38) $A \wedge \mathrm{B} \vdash \neg(\neg A \vee \neg B)$,
39) $\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash A \wedge \mathrm{B}$,
40) $A \supset B \vdash \neg A \vee B$,
41) $\vdash \neg A \vee B \supset (A \supset B)$,
42) $\vdash A \vee B \supset (\neg A \supset B))$,
43) $\neg A \supset B \vdash A \vee B$.

8. Проверьте правильность рассуждений:
   1) Если 2 – простое число, то это наименьшее простое число. Если 2 – наименьшее простое число, то 1 не есть простое число. Число 1 не есть простое число. Следовательно, 2 – простое число.
   2) Если все стороны четырехугольника равны между собой, то он является ромбом. Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали перпендикулярны. Все стороны четырехугольника равны между собой. Следовательно, его диагонали перпендикулярны.
   3) Если противоположные стороны четырехугольника попарно равны, то он является параллелограммом. Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали делятся в точке пересечения пополам. Противоположные стороны четырехугольника попарно равны. Следовательно, его диагонали точкой пересечения делятся пополам.
   4) Иванов не сделает эту работу, если ее сделает Петров. Петров и Сидоров сделают эту работу в том и только том случае, если ее сделает Иванов. Сидоров, эту работу сделает, а Иванов нет. Следовательно, Петров не сделает эту работу.

4. ЛОГИКА И ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

4.1. ПРЕДИКАТЫ, КВАНТОРЫ. ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ.

Предикатом называется функция $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, переменные которой принимают значения из некоторого множества M, а сама она принимает два значения: И (истинное) и Л (ложное), т.е.

$$P(x_1,x_2,...,x_n)\colon\ M^n \to \{\mathrm{С},\mathrm{о}\}.$$

Предикат от n аргументов называют n-местным предикатом. Множество M значений переменных определяется обычно математическим контекстом.

Предикаты обозначаются прописными буквами латинского алфавита. Иногда бывает удобно указывать число переменных у предикатов. В таких случаях у символов предикатов пишут верхний индекс, который и указывает число аргументов, например: $P^{(n)}(x_1,x_2,...,x_n)$ – n-местный предикат. Высказывания считаются нуль-местными предикатами.

Над предикатами можно производить обычные логические операции. В результате этих операций получаются новые предикаты.

Кроме операций логики высказываний, для построения новых предикатов используются операции связывания квантором.

Квантор всеобщности. Пусть $P(x)$ – некоторый предикат, принимающий значение И или Л для каждого элемента множества M. Тогда под выражением $\forall xP(x)$ будем подразумевать высказывание истинное, когда $P(x)$ истинно для каждого элемента x из множества M, и ложное – в противном случае. Читается это выражение так: «для всех x $P(x)$». Это высказывание уже не зависит от x. Символ $\forall x$ называется квантором всеобщности.

$$\forall xP(x)\overset{\mathbf{def}}{\equiv} P(x_1)\wedge P(x_2)\wedge\cdots$$

Квантор существования. Пусть $P(x)$ – некоторый предикат. Под выражением $\exists xP(x)$ будем понимать высказывание истинное, когда существует элемент множества M, для которого $P(x)$ истинно, и ложное – в противном случае. Читается это выражение так: «существует x такое, что $P(x)$». Это высказывание уже не зависит от x. Символ $\exists x$ называется квантором существования.

$$\exists xP(x)\overset{\mathbf{def}}{\equiv} P(x_1)\vee P(x_2)\vee\cdots$$

Пример. Пусть $P(x)$=«x делится на два», $Q(x)$=«x делится на три». Тогда $\exists x(P(x)\wedge Q(x))$ – истинное высказывание; $\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ – ложное высказывание.

Алфавит логики предикатов содержит следующие символы:

1) символы предметных переменных – обычно строчные латинские буквы с индексами или без них;
2) символы предикатов – обычно прописные латинские буквы с индексами или без них;
3) логические символы: $\urcorner$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\sim$;
4) символы кванторов – $\exists$, $\forall$;
5) скобки и запятую.

Слово в алфавите логике предикатов называется *формулой*, если оно удовлетворяет следующему индуктивному определению:

1) Если P – символ предиката, x_1, x_2,..., x_n – символы предметных переменных, то $P(x_1,x_2,...,x_n)$ – формула. Такая формула называется *атомарной*. Все предметные переменные атомарных формул свободные, связанных переменных нет.
2) Пусть A – формула. Тогда $\neg A$ тоже формула. Свободные и связанные переменные формулы $\neg A$ – это соответственно свободные и связанные переменные формулы A.
3) Пусть A и B – формулы, причем нет таких предметных переменных, которые были бы связаны в одной формуле и свободны в другой. Тогда $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \supset B$, $A \sim B$ есть формулы, в которых свободные переменные формул A и B остаются свободными, а связанные переменные формул A и B остаются связанными.
4) Пусть A – формула, содержащая свободную переменную x. Тогда $\exists xA$, $\forall xA$ тоже формулы, Переменная x в них связана. Остальные переменные, которые в формуле A свободны, остаются свободными, а переменные, которые в формуле A связаны, остаются связанными. Говорят, что формула A есть *область действия квантора*.
5) Слово в алфавите логики предикатов 1–5 является формулой только в том случае, если это следует из правил 1–4.

Заметим, что по определению формулы никакая переменная не может быть одновременно свободной и связанной.

Значение формулы определено лишь тогда, когда задана какая-нибудь интерпретация входящих в нее символов. Под *интерпретацией* (*моделью*) понимают систему $D=<M, f>$, состоящую из непустого множества M и соответствия f, которое для каждого предикатного символа $A^{(n)}$ определяет n-местный предикат.

4.2. РАВНОСИЛЬНОСТЬ ФОРМУЛ

Пусть формулы F и G имеют одно и то же множество свободных переменных.

Формулы F и G *равносильны в данной модели*, если на любом наборе значений свободных переменных они принимают одинаковые значения.

Формулы F и G *равносильны на множестве* M, если они равносильны во всех моделях, заданных на множестве M.

Формулы F и G *равносильны* (в логике предикатов), если они равносильны на всех множествах (тогда будем писать $F=G$).

Пример. На множестве $M=\{a,b\}$ зададим предикаты $P_1(x,y)$ и $P_2(x,y)$.

x	y	$P_1(x,y)$	$P_2(x,y)$
a	a	И	И
a	b	Л	И
b	a	Л	Л
b	b	И	Л

Рассмотрим две формулы

$$Q(x_1,x_2)\wedge Q(x_1,x_3), \tag{1}$$

$$Q(x_1,x_2)\wedge Q(x_2,x_3). \tag{2}$$

Если областью модели служит множество M и формула Q интерпретируется как предикат P_1, то формулы (1) и (2) равносильны в этой модели, так как принимают значение И только на двух наборах свободных переменных $<a,a,a>$ и $<b,b,b>$.

Если областью модели является то же множество M, но формула Q интерпретируется как предикат P_2, то формулы (1) и (2) не равносильны, так как на наборе $<a,b,b>$ формула (1) принимает значение И, а формула (2) – значение Л.

Укажем несколько правил перехода от одних формул к другим, им равносильным (во всех моделях).

Основные равносильности логики предикатов

1) $\forall x\forall yP(x,y)=\forall y\forall xP(x,y)$, $\exists x\exists yP(x,y)=\exists y\exists xP(x,y)$.
2) $\exists x\forall yP(x,y)\supset\forall y\exists xP(x,y)$, $\exists y\forall xP(x,y)\supset\forall x\exists yP(x,y)$.
3) $\neg\forall xP(x)=\exists x\neg P(x)$, $\neg\exists xP(x)=\forall x\neg P(x)$.
4) $\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)=\forall x(P(x)\wedge Q(x))$, но $\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)\neq\exists x(P(x)\wedge Q(x))$.
5) $\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)=\exists x(P(x)\vee Q(x))$, но $\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)\neq\forall x(P(x)\vee Q(x))$.
6) Если в формуле C нет свободной переменной x, то
   $\forall xP(x)\vee C=\forall x(P(x)\vee C)$, $\exists xP(x)\wedge C=\exists x(P(x)\wedge C)$.

Приведенные формулы

Формулы, в которых из логических символов имеются только символы $\wedge$, $\vee$, $\neg$, причем символ $\neg$ встречается лишь перед символами предикатов, будем называть *приведенными* формулами.

Для любой формулы существует равносильная ей приведенная формула, причём множества свободных и связанных переменных этих формул совпадают. Такая формула называется *приведенной формой* данной формулы.

Приведенная формула называется *нормальной*, если она не содержит символов кванторов или все символы кванторов стоят в начале формулы (т.е. логические символы и символы предикатов стоят в области действия каждого квантора).

Для любой приведенной формулы существует равносильная ей нормальная формула той же длины. Такая формула называется *нормальной формой* данной приведенной формулы.

Выполнимость. Общезначимость.

Рассмотрим некоторую модель с множеством *M*.

Говорят, что формула *A* *выполнима в данной модели* если существует набор $<a_1, a_2, ..., a_n>$, $a_i \in M$, значений свободных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ формулы *A* такой, что $A\big(_{(a_1, a_2, \ldots, a_n(} = \text{С}$.

Говорят, что формула *A* *истинна в данной модели*, если она принимает значение И на любом наборе $<a_1, a_2, ..., a_n>$, $a_i \in M$, значений своих свободных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Говорят, что формула *A* *общезначима* или тождественно истинна (в логике предикатов), если она истинна в каждой модели.

Говорят, что формула *A* *выполнима* (в логике предикатов), если существует модель, в которой *A* выполнима.

Формула *A* общезначима тогда и только тогда, когда формула $\neg A$ не является выполнимой, и формула *A* выполнима тогда и только тогда, когда формула $\neg A$ не является общезначимой.

Теорема Чёрча. Не существует алгоритм, который для любой формулы логики предикатов устанавливает, общезначима она или нет.

4.3. ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

В логике предикатов, в отличие от логики высказываний, нет эффективного способа для распознавания общезначимости формул. Поэтому аксиоматический метод становится существенным при изучении формул, содержащих кванторы. Выделение общезначимых формул, так же как и в исчислении высказываний, осуществляется путем указания некоторой совокупности формул, которые называются аксиомами, и указания правил вывода, позволяющих из одних общезначимых формул получать другие общезначимые формулы.

Исчисление предикатов – это аксиоматическая теория:

Алфавит – те же символы, что и в логике предикатов.

Понятие формулы – совпадает с понятием формулы в логике предикатов.

Аксиомы:

1) $1 \div 10$. – аксиомы Клини исчисления высказываний
2) $\forall xA(x) \supset A(y)$ ($\forall$-схема)
3) $A(y) \supset \exists xA(x)$ ($\exists$-схема)

Система правил вывода:

1) $\dfrac{A, A \supset B}{B}$ *modus ponens* (*m.p.*)
2) $\dfrac{C \supset A(x)}{C \supset \forall yA(y)}$ правило обобщения ($\forall$-правило)
3) $\dfrac{A(x) \supset C}{\exists yA(y) \supset C}$ правило введения $\exists$ ($\exists$-правило)
4) Правило переименования связанной переменной. Связанную переменную формулы A можно заменить (в кванторе и во всех вхождениях в области действия квантора) другой переменной, не являющейся свободной в A.

Понятия вывода, теоремы и доказательства определяются в исчислении предикатов точно так же, как и в любой аксиоматической теории.

Теорема. Аксиомы исчисления предикатов – общезначимые формулы.

Теорема. Формула, получающаяся из общезначимой по любому из правил вывода 1–4, является общезначимой.

Теорема. Любая выводимая в исчислении предикатов формула общезначима.

Теорема. Исчисление предикатов непротиворечиво.

Теорема Гёделя. Всякая общезначимая формула выводима в исчислении предикатов.

Теорема о дедукции. Если имеется вывод в исчислении предикатов формулы B из последовательности формул Γ, A, то можно построить вывод формулы $A \supset B$ из последовательности формул Γ (символически: Если $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \supset B$), где Γ – набор некоторых формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Применение логики предикатов к естественному языку

$\forall x A(x)$	Для любого x (имеет место) A $A(x)$ при произвольном x Для всех x (верно) $A(x)$ $A(x)$, каково бы ни было x Для каждого x (верно) $A(x)$ Всегда имеет место $A(x)$ Каждый обладает свойством A Свойство A присуще всем Всё удовлетворяет A Любой объект является A Всякая вещь обладает свойством A
$\exists x A(x)$	Для некоторых x (имеет место) $A(x)$ Для подходящего x (верно) $A(x)$ Существует x, для которого (такой, что) $A(x)$ Имеется x, для которого (такой, что) $A(x)$ Найдется x, для которого (такой, что) $A(x)$ У некоторых вещей есть признак A Хотя бы для одного x (верно) $A(x)$ Кто-нибудь относится к (есть)A По крайней мере, один объект есть A
$\neg \forall x A(x)$	Не для каждого x (верно) $A(x)$ Не при всяких x (верно) $A(x)$ $A(x)$ оказывается истинным не для всех x Не всё обладает свойством A Не все суть A A не всегда верно
$\forall x \neg A(x)$	Для всякого x неверно $A(x)$ $A(x)$ всегда ложно Ничто не обладает свойством A Все суть не A

$\neg\exists x A(x)$	Не существует x такого, что $A(x)$ Нет (никакого) x такого, что $A(x)$ $A(x)$ не выполняется ни для какого x Ничто не обладает свойством A Никто не есть A Неверно, что для некоторых x $A(x)$
$\exists x \neg A(x)$	Для некоторого x не(верно) $A(x)$ Что-то не обладает свойством A Кто-то суть не A

Пример. Правильная формализация высказывания «Выгул кошек и собак воспрещен» – $\neg\exists x((K(x)\vee C(x))\wedge B(x))$ или $\forall x((K(x)\wedge C(x))\supset\neg B(x))$. Но было бы ошибкой переводить «На всех кошек и собак надлежит получить разрешение» через $\forall x((K(x)\wedge C(x))\supset P(x))$, т.к. множество x таких что верно $K(x)\wedge C(x)$ пусто. Правильный перевод:

$\forall x(K(x)\supset P(x))\wedge\forall x(C(x)\supset P(x))$ или $\forall x((K(x)\vee C(x))\supset P(x))$.

4.4. ИСЧИСЛЕНИЕ ОДНОМЕСТНЫХ ПРЕДИКАТОВ КАК ИСЧИСЛЕНИЕ КЛАССОВ. ТЕОРИЯ КАТЕГОРИЧЕСКИХ СУЖДЕНИЙ И СИЛЛОГИЗМОВ АРИСТОТЕЛЯ.

Совокупность предметов, на котором одноместный предикат принимает значение И, называется характеристическим классом.

Используя понятие характеристического класса, можно установить соответствие между теорией множеств и исчислением одноместных предикатов. При этом операция конъюнкции двух предикатов будет соответствовать операции пересечения их характеристических классов, дизъюнкция – объединению, отрицание – дополнению и т.д.

Заметим, что множество и класс – не эквивалентные понятия. Для каждого множества можно определить предикат, характеристический класс которого будет совпадать с этим множеством, однако не всякий характеристический класс – множество. Примером класса, не являющегося множеством, является класс Рассела (известный также, как парадокс брадобрея), определяемый предикатом: $F(x)=x\notin x$.

Категорическим суждением в логике Аристотеля называется высказывание о двух классах. Всего выделяется четыре типа категорических суждений.

Общеутвердительным называется высказывание вида «Все предметы класса P суть предметы класса Q». Общеутвердительное высказывание обозначается буквой A.

Общеотрицательным называется высказывание вида «Никакие предметы класса P не суть предметы класса Q». Общеотрицательное высказывание обозначается буквой E.

Частноутвердительным называется высказывание вида «Некоторые предметы класса P суть предметы класса Q». Частноутвердительное высказывание обозначается буквой I.

Частноотрицательным называется высказывание вида «Некоторые предметы класса P не суть предметы класса Q». Частноотрицательное высказывание обозначается буквой O.

Пользуясь исчислением предикатов, категорические суждения можно формализовать следующим образом.

$A.$ $\forall x(P(x)\supset Q(x))=\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))=\forall x\neg(P(x)\wedge\neg Q(x))=\neg\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))$,

$E.$ $\forall x(P(x)\supset\neg Q(x))=\forall x(Q(x)\supset\neg P(x))=\forall x(\neg P(x)\vee\neg Q(x))=\neg\exists x(P(x)\wedge Q(x))$,

$I.$ $\exists x(P(x)\wedge Q(x))=\exists x\neg(\neg P(x)\vee\neg Q(x))=\neg\forall x(\neg P(x)\vee\neg Q(x))=\neg\forall x(P(x)\supset\neg Q(x))$,

$O.$ $\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))=\neg\forall x(P(x)\supset Q(x))$.

В исчислении предикатов легко проверяются законы формальной логики Аристотеля:

I. Законы отрицания категорических суждений.

$\neg A=O$; $\neg O=A$; $\neg E=I$; $\neg I=E$.

II. Законы обращения категорических суждений (обращением называется перестановка мест классов P и Q).

$E=E^{т}$, $I=I^{т}$.

III. Законы логики.

$A\supset I$; $E\supset O$; $\neg(A\supset E)$; $\neg(E\supset A)$; $\neg(I\supset O)$; $\neg(O\supset I)$

Категорическим силлогизмом называется конструкция из трех категорических суждений о трех классах, в которой третье суждение логически следует из двух первых. При этом первое суждение называется *большой посылкой*, второе – *малой посылкой*, а третье – *заключением*.

Класс, присутствующий в большой и в малой посылках, называется *средним*. Будем обозначать его буквой P.

Класс, присутствующий в большой посылке и в заключении, называется *большим*. Будем обозначать его буквой Q.

Класс, присутствующий в малой посылке и в заключении, называется *малым*. Будем обозначать его буквой S.

Силлогизм называется *правильным*, если истинность посылок всегда вызывает истинность заключения, независимо от содержания высказываний.

Аристотель классифицировал все виды силлогизмов по типам (*модусам*) и выделил из всех модусов правильные.

Все модусы Аристотель подразделил на 4 группы по расположению классов.

$$1)\ \frac{\begin{matrix}PQ\\ SP\end{matrix}}{SQ}\qquad 2)\ \frac{\begin{matrix}QP\\ SP\end{matrix}}{SQ}\qquad 3)\ \frac{\begin{matrix}PQ\\ PS\end{matrix}}{SQ}\qquad 4)\ \frac{\begin{matrix}QP\\ PS\end{matrix}}{SQ}$$

Поскольку категорические суждения бывают четырех типов, каждая группа силлогизмов содержит 64 различных модуса. Для запоминания, какие из них правильные, используют мнемонические имена.

Правильными являются следующие модусы:
В первой группе – Barbara, Celarent, Darii, Ferio.
Во второй группе – Cesare, Camestres, Festino, Baroco.
В третьей группе – Datisi, Ferison, Disamis, Bocado.
В четвертой группе – Fresison, Dimatis, Calemes.

Пользуются этими именами следующим образом. Гласные буквы подставляют в заданном этим именем порядке в шаблон группы модусов. Эти буквы означают тип категорического суждения. Например, построим силлогизм по модусу Barbara

PaQ	Все люди смертны.
$\underline{SaP}$	<u>Кай – человек.</u>
SaQ	Кай – смертен.

Проверить правильность модусов можно в исчислении предикатов. Отметим, что Аристотель и его последователи не признавали классов, в которых нет объектов (например, пустое множество). Поэтому в логике Аристотеля не 15 правильных модусов, а 19: в третьей группе добавляются модусы Darapti и Felapton, а в четвертой – Bamalip и Fesapo, которые правильны при условии непустоты классов P, S и Q.

Задачи

1. Будут ли следующие выражения формулами, и если это формулы, то какие переменные в них являются свободными, а какие связанными:
   1) $\forall x_1\exists x_2\forall x_3P(x_1,x_2,x_3,x_4)$;
   2) $\forall x_1P(x_1,x_2)\supset\exists x_2P(x_1,x_2)$;
   3) $\exists x_1\exists x_2(P(x_1,x_2)\wedge Q(x_1,x_2))$?
2. Пусть $M=<\mathbf{Z}^+,f>$, где $\mathbf{Z}^+$ – множество неотрицательный целых чисел, f – соответствие, которое для предикатных символов $S^{(3)}(x,y,z)$, $P^{(3)}(x,y,z)$ определяет следующие предикаты:

$S^{(3)}(x,y,z)$=И$\Leftrightarrow x+y=z$; $P^{(3)}(x,y,z)$=И$\Leftrightarrow xy=z$.

Записать в модели M формулы, выражающие следующие утверждения:

1) $x=0$;
2) $x=1$;
3) $x=2$;
4) x – четное число;
5) x – нечетное число;
6) x – простое число;
7) $x=y$;
8) $x\leq y$;
9) $x<y$;
10) x делит y;
11) z наименьшее общее кратное x и y;
12) z наибольший общий делитель x и y;
13) коммутативность сложения;
14) ассоциативность сложения;
15) коммутативность умножения;
16) ассоциативность умножения;
17) дистрибутивность сложения относительно умножения;
18) бесконечность множества простых чисел.

3. Пусть M – множество точек, прямых и плоскостей трехмерного евклидова пространства. Рассмотрим модель $D=<M,f>$, где f – соответствие, которое для предикатных символов $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $Q(x,y)$, $R(x,y)$ определяет следующие предикаты:

$P_1(x)$= И $\Leftrightarrow$«x–точка», $P_2(x)$= И $\Leftrightarrow$«x–прямая», $P_3(x)$= И $\Leftrightarrow$«x–плоскость»,

$Q(x,y)$= И $\Leftrightarrow$«x лежит на y», $R(x,y)$= И $\Leftrightarrow$«x совпадает с y».

Записать в этой модели следующие утверждения:

1) через каждые две точки можно провести прямую и притом единственную, если эти две точки различны;
2) через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную плоскость;
3) определение параллельных прямых;
4) определение параллельных плоскостей;
5) аксиому Евклида о параллельных прямых (через точку, не лежащую на данной прямой, всегда можно провести прямую, параллельную данной прямой, причем только одну);
6) аксиому Лобачевского о параллельных прямых (через точку, не лежащую на данной прямой, всегда можно провести бесконечно много прямых, параллельных данной прямой).

4. Подобрать необходимую модель и записать следующие определения:
   1) рефлексивность бинарных отношений;
   2) иррефлексивность бинарных отношений;
   3) симметричность бинарных отношений;
   4) антисимметричность бинарных отношений;
   5) транзитивность бинарных отношений;
   6) бинарное отношение есть отношение эквивалентности.
5. Подобрать необходимую модель и записать отрицания определений из задачи 4.
6. Пусть $f(x)$ – произвольная фиксированная функция, заданная на отрезке $[a,b]$. Рассмотрим модель $D=<\mathbf{R}, g>$, где $\mathbf{R}$ – множество действительных чисел; g – соответствие, которое для предикатных символов $P(x,\delta)$, $Q(x,\varepsilon)$ и $S(\varepsilon)$ определяет предикаты: $P(x,\delta)=И\Leftrightarrow|x-x_0|<\delta$; $Q(x,\varepsilon)=И\Leftrightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$; $S(\varepsilon)=И\Leftrightarrow\varepsilon>0$. Здесь x_0 – фиксированный элемент отрезка $[a,b]$. Для действительного числа A сформулировать утверждение о том, что:
   1) число A есть предел функции $f(x)$ при $x\to x_0$,
   2) неверно, что число A есть предел функции $f(x)$ при $x\to x_0$,
   3) не существует предела функции $f(x)$ при $x\to x_0$.
7. Пусть $f(x)$ – произвольная фиксированная функция, заданная на отрезке $[a,b]$. Рассмотрим модель $D=<\mathbf{R}, g>$, где $\mathbf{R}$ – множество действительных чисел; g – соответствие, которое для предикатных символов $P(x,\delta)$, $S(\varepsilon)$ и $Q(x,\varepsilon)$ определяет предикаты $P(x,\delta)=И\Leftrightarrow|x-x_0|<\delta$; $S(\varepsilon)=И\Leftrightarrow\varepsilon>0$; $Q(x,\varepsilon)=И\Leftrightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Здесь x_0 – фиксированный элемент отрезка $[a,b]$. Сформулировать утверждение о том, что:
   1) функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0,
   2) функция $f(x)$ разрывна в точке x_0.
8. Пусть $f(x)$ – произвольная фиксированная функция, заданная на отрезке $[a,b]$. Рассмотрим модель $D=<\mathbf{R}, g>$, где $\mathbf{R}$ – множество действительных чисел; g – соответствие, которое для предикатных символов $P(x,x_1,\delta)$, $S(\varepsilon)$, $Q(x,x_1,\varepsilon)$ и $T(x)$ определяет предикаты $P(x,x_1,\delta)=И\Leftrightarrow|x-x_1|<\delta$; $S(\varepsilon)=И\Leftrightarrow\varepsilon>0$; $Q(x,x_1,\varepsilon)=И\Leftrightarrow|f(x)-f(x_1)|<\varepsilon$; $T(x)=И\Leftrightarrow x\in[a,b]$. Сформулировать утверждение о том, что:
   1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$,
   2) функция $f(x)$ равномерно-непрерывна на отрезке $[a,b]$.
9. В модели $D=<M,f>$, где $M=$ Р(A), A – некоторое множество, f – соответствие, определяющее предикатный символ $S(x,y)$ как предикат $x\subset y$, записать, что:

1) x – пересечение y и z;
2) x – объединение y и z;
3) $x=\varnothing$;
4) $x=A$;
5) x – дополнение y.

10. Пусть A=<L, f>, где L – множество людей, f – соответствие, определяющее предикатные символы $E^{(2)}(x, y)$, $P^{(2)}(x, y)$, $C^{(2)}(x, y)$, $M(x)$, $W(x)$ как следующие предикаты:

$E^{(2)}(x, y)$ = И $\Leftrightarrow$ x и y – один и тот же человек;
$P^{(2)}(x, y)$ = И $\Leftrightarrow$ x родитель y;
$C^{(2)}(x, y)$ = И $\Leftrightarrow$ x и y – супруги;
$M(x)$ = И $\Leftrightarrow$ x – мужчина;
$W(x)$ = И $\Leftrightarrow$ x – женщина.

Записать в модели A формулы, выражающие следующие утверждения:
1) У каждого есть отец и мать.
2) У каждого есть бабушка.
3) У каждого есть дедушка
4) Х – прабабушка
5) Х – прадедушка
6) Х – деверь
7) Х – шурин
8) Х – кузен
9) Х – кузина
10) Х – золовка
11) Х – тесть
12) Х – теща
13) Х – свекровь
14) Х – свекор
15) Х – зять
16) Х – сноха
17) Х – правнук
18) Х – правнучка
19) Х – невестка
20) Х – дядя
21) Х – тетя
22) Х – племянник
23) Х – племянница
24) Х – внучатый племянник
25) Х – внучатая племянница
26) Х – двоюродный дядя
27) Х – двоюродная племянница

28) X – двоюродная тетя
29) X – двоюродный племянник
30) У некоторых людей есть братья
31) У некоторых людей есть сестры
32) Некоторые супруги бездетны
33) Некоторые супруги имеют детей
34) Некоторые супруги имеют детей только женского пола
35) Некоторые супруги имеют детей только мужского пола
36) X внебрачный сын Y
37) X внебрачная дочь Y
38) X – незаконнорожденный

11. Решить задачу 10 для модели A=<L, f>, где L – множество людей, f – соответствие, соответствие, которое для предикатных символов $E^{(2)}(x, y)$, $S^{(2)}(x, y)$, $D^{(2)}(x, y)$, $H^{(2)}(x, y)$, определяет предикаты:

    $E^{(2)}(x, y)$ = И $\Leftrightarrow$ x и y – один и тот же человек;
    $S^{(2)}(x, y)$ = И $\Leftrightarrow$ x сын y;
    $D^{(2)}(x, y)$ = И $\Leftrightarrow$ x дочь y;
    $H^{(2)}(x, y)$ = И $\Leftrightarrow$ x муж y.

12. Решить задачу 10 для модели A=<L, f>, где L – множество людей, f – соответствие, соответствие, которое для предикатных символов $E^{(2)}(x, y)$, $Dc^{(2)}(x, y)$, $H^{(2)}(x, y)$, $M(x)$, $W(x)$ определяет предикаты:

    $E^{(2)}(x, y)$ = И $\Leftrightarrow$ x и y – один и тот же человек;
    $Dc^{(2)}(x, y)$ = И $\Leftrightarrow$ x потомок y
    $H^{(2)}(x, y)$ = И $\Leftrightarrow$ x муж y;
    $M(x)$ = И $\Leftrightarrow$ x – мужчина;
    $W(x)$ = И $\Leftrightarrow$ x – женщина.

13. Решить задачу 10 для модели A=<L, f>, где L – множество людей, f – соответствие, соответствие, которое для предикатных символов $E^{(2)}(x, y)$, $F^{(2)}(x, y)$, $Wf^{(2)}(x, y)$, $M(x)$, $W(x)$ определяет предикаты:

    $E^{(2)}(x, y)$ = И $\Leftrightarrow$ x и y – один и тот же человек;
    $F^{(2)}(x, y)$ = И $\Leftrightarrow$ x предок y
    $Wf^{(2)}(x, y)$ = И $\Leftrightarrow$ x жена y;
    $M(x)$ = И $\Leftrightarrow$ x – мужчина;
    $W(x)$ = И $\Leftrightarrow$ x – женщина.

14. Решить задачу 10 для модели A=<L, f>, где L – множество людей, f – соответствие, определяющее предикатные символы $E^{(2)}(x, y)$, $P^{(2)}(x, y)$, $C^{(2)}(x, y)$, $M(x)$, $W(x)$ как следующие предикаты:

$E^{(2)}(x, y) = \text{И} \Leftrightarrow x$ и y – один и тот же человек;
$Ch^{(2)}(x, y) = \text{И} \Leftrightarrow x$ ребенок y;
$C^{(2)}(x, y) = \text{И} \Leftrightarrow x$ и y – супруги;
$M(x) = \text{И} \Leftrightarrow x$ – мужчина;
$W(x) = \text{И} \Leftrightarrow x$ – женщина.

15. Выполнимы ли следующие формулы:
1) $\exists x P(x)$;
2) $\forall x P(x)$;
3) $\exists x \forall y (P(x,x) \wedge \neg P(x,y))$;
4) $\exists x \exists y (P(x) \wedge \neg P(y))$;
5) $\exists x \forall y (Q(x,y) \supset \forall z R(x,y,z))$;
6) $P(x) \supset \forall y P(y)$;
7) $\exists x P(x) \supset P(y)$;
8) $\forall x \exists y (P(x) \supset \neg P(y))$;
9) $\forall x \exists y (\neg P(x) \supset P(y))$;
10) $\exists y \forall x (P(x) \supset \neg P(y))$;
11) $\exists y \forall x (\neg P(x) \supset P(y))$?

16. Будут ли общезначимы следующие формулы:
1) $\forall x P(x) \supset P(y)$;
2) $P(y) \supset \forall x P(x)$;
3) $\exists x P(x) \supset \forall x P(x)$;
4) $\neg(\exists x P(x) \supset \forall x P(x))$;
5) $\exists x \forall y Q(x,y) \supset \forall y \exists x Q(x,y)$;
6) $\forall x \exists y Q(x,y) \supset \exists y \forall x Q(x,y)$?

17. Докажите, что следующие формулы общезначимы:
1) $\neg \exists x P(x) \supset \neg \forall x P(x)$;
2) $\forall x P(x) \supset \exists x P(x)$;
3) $\exists x (P(x) \wedge (B \supset R(x))) \supset (\forall x (P(x) \supset \neg R(x)) \supset \neg B)$;
4) $\forall x (P(x) \supset \neg Q(x)) \supset \neg(\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x))$;
5) $\forall x (P(x) \supset \neg Q(x)) \supset \neg(\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x))$;
6) $(\forall x A(x) \wedge B) \sim \forall x (A(x) \wedge B)$;
7) $(B \wedge \forall x A(x)) \sim \forall x (B \wedge A(x))$;
8) $(B \wedge \exists x A(x)) \sim \exists x (B \wedge A(x))$;
9) $(\exists x A(x) \wedge B) \sim \exists x (A(x) \wedge B)$;
10) $(B \vee \forall x A(x)) \sim \forall x (B \vee A(x))$;
11) $(\forall x A(x) \vee B) \sim \forall x (A(x) \vee B)$;
12) $(B \vee \exists x A(x)) \sim \exists x (B \vee A(x))$;
13) $(\exists x A(x) \vee B) \sim \exists x (A(x) \vee B)$;
14) $(B \supset \forall x A(x)) \sim \forall x (B \supset A(x))$;
15) $(\forall x A(x) \supset B) \sim \exists x (A(x) \supset B)$;
16) $(\exists x A(x) \supset B) \sim \forall x (A(x) \supset B)$;
17) $(B \supset \exists x A(x)) \sim \exists x (B \supset A(x))$;
18) $(\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)) \sim \forall x (A(x) \wedge B(x))$;
19) $(\exists x B(x) \vee \exists x A(x)) \sim \exists x (B(x) \vee A(x))$.

18. Найти нормальную форму для следующих предикатов:

1) $\neg\exists x\forall y\exists z\forall uA$;
2) $\exists x\forall yA(x,y)\wedge\exists x\forall yB(x,y)$;
3) $\exists x\forall yA(x,y)\vee\exists x\forall yB(x,y)$;
4) $\exists x\forall yA(x,y)\supset\exists x\forall yB(x,y)$;
5) $\exists x\forall yA(x,y)\supset\forall x\exists yB(x,y)$.

19. Построить вывод $\forall x\forall yA \vdash A$

20. Докажите теорему о дедукции для предикатов.

Указание. Доказательство аналогично доказательству теоремы о дедукции для высказываний, только добавляются ещё два случая:

1) Вспомогательный вывод содержит формулы:

i. $C\supset P(x)$,

ii. $C\supset\forall xP(x)$ $\forall$-правило, i.

тогда в результирующем выводе должна появиться последовательность формул:

k. $A\supset(C\supset P(x))$

. . .

m. $A\wedge C\supset P(x)$

m+1. $A\wedge C\supset\forall xP(x)$ $\forall$-правило, m

. . .

n. $A\supset(C\supset\forall xP(x))$

2) Вспомогательный вывод содержит формулы:

i. $P(x)\supset C$

ii. $\exists yP(y)\supset C$ $\exists$-правило, i

тогда в результирующем выводе должна появиться последовательность формул:

k. $A\supset(P(x)\supset C)$

. . .

m. $P(x)\supset(A\supset C)$

m+1. $\exists yP(y)\supset(A\supset C)$ $\exists$-правило, m

. . .

n. $A\supset(\exists yP(y)\supset C)$

Здесь A является переносимой посылкой.

Для доказательства теоремы необходимо восстановить для обоих случаев пропущенные формулы результирующего вывода (т.е. формулы между k-й и m-й, m+1-й и n-й.

21. Переведите каждый из данных доводов в логическую символику и установите общезначимость или необщезначимость полученной формулы:

1) Каждый любит сам себя. Значит, кого-то кто-нибудь любит.

2) Все любят Джейн. Значит, все любимы кем-то.
3) Ни одно животное не бессмертно. Кошки – животные. Значит, некоторые кошки не бессмертны.
4) Перья есть только у птиц. Ни одно млекопитающее не является птицей. Значит, все млекопитающие лишены перьев.
5) Имеются прилежные студенты. Ни один студент не лишен способностей. Значит, некоторые студенты, лишенные способностей, не прилежны.
6) Все политики – лицедеи. Некоторые лицедеи – лицемеры. Значит, некоторые политики – лицемеры.
7) Ничто плодотворное не легко. Некоторые легкие вещи общедоступны. Значит, некоторые общедоступные вещи не плодотворны.
8) У нее только преданные друзья. Некоторые из ее друзей – лицемеры. Ни один лицемер не может быть преданным. Значит, все ее друзья – проходимцы.
9) Этому никто не поверит. Значит, судья этому не поверит.
10) Глупец был бы способен на это. Я на это не способен. Значит, я не глупец.
11) Если бы кто-нибудь мог решить эту задачу, то и какой-нибудь математик мог бы. Кэбот – математик, а не может ее решить. Значит, задача неразрешима.
12) Всякий, кто может решить эту задачу, – математик. Кэбот не может её решить. Значит, Кэбот – не математик.
13) Всякий, кто может решить эту задачу, – математик. Ни один математик не может решить этой задачи. Значит, она неразрешима.
14) Если какое-нибудь из чисел, лежащих (строго) между 1 и 101, делит 101, то простое число, меньше 11, делит 101. Ни одно простое число, меньшее 11, не делит 101. Значит, ни одно число между 1 и 101 не делит 101.
15) Тот, кто распускает этот слух, должен быть и ловким, и беспринципным. Кэбот не ловок. Лоувелл не беспринципен. Значит, ни Кэбот, ни Лоувелл не распускают этот слух.
16) Никто не поймет этого сообщения, если кто-нибудь не разгадает кода. Значит, имеется кто-то, кто может понять это сообщение, только если разгадает код.
17) Любой радикал является сторонником общественного прогресса. Иные консерваторы недолюбливают всех сторонников общественного прогресса. Значит, иные консерваторы недолюбливают всех радикалов.
18) Надежда еще не потеряна. Значит еще не все потеряно.

22. Привести примеры силлогизмов, построенных по правильным модусам.

Список рекомендуемой литературы

1. *Виленкин Н.Я.* Рассказы о множествах. – М.: Наука, 1969.

2. *Клини С.К.* Математическая логика. – М.:Мир, 1973.

3. *Лавров И.А., Максимова Л.Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Наука, 1975.

4. *Нефедов В.Н., Осипова В.А.* Курс дискретной математики: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1992